37. 11. 26

Optica Promota,

Seu

Abdita radiorum reflexorum & refractorum

MYSTERIA,

Geometrice Enucleata;

Cui subnectitur

APPENDIX,

Subtilissimorum Astronomiæ Problematωn resolutionem exhibens.

Authore *Jacobo Gregorio*, Abredonensi *Scoto*.

LONDINI,

Excudebat *J. Hayes*, pro *S. Thomson*, ad Insigne Episcopi, in Cœmeterio Paulino, 1663.

J.P.
Sc.

Serenissimo & Potentissimo,

CAROLO II°,

Dei Gratia Magnæ Britanniæ, Franciæ, & Hiberniæ Regi, Fidei Defensori, *&c.*

NE miretur Sacra tua Majestas, hominem obscurum pedibus tuis advolutum, augustum tuum nomen lucubrationibus suis præfixisse: cum enim tuus Subditus, in lucem sit editus; & igitur hoc saltem jure patrocinium tuum vendicans; quid impedit, quin se cum munusculo suo acceptum iri speret. Non desunt tamen argumenta, quæ idem suaserunt: indoles tua sublimis, per universum terrarum orbem, inter eximias alias verè regias, quibus pollet dotes, celebrata, Musis etiam excolendis deditissima, quæ Scientias Artesq; promovere, & Literatos fovere satagit. Addo etiam, opor-

tere res Mathematicas apprimè gratas esse Regi, qui Regnorum suorum emolumento incumbit. Hoc enim, cum vel e re Militari, Mercaturâ, re Nauticâ, Agriculturâ, vel Artibus Mechanicis proveniat; quid his magis utile, imò necessarium, iis studiis quæ ad Matheſim pertinent: inter hæc autem, ea quæ in hoc libello tractantur, postremo loco non sunt habenda; utpote quæ non solum utilia, sed & jucunda præ cæteris reputantur: hisce fretus, ad Majestatis tuæ pedes, devotione quâ decet, Opusculum hoc deponit,

Majestatis tuæ

Humillimus

ac Devotissimus Subditus,

Jacobus Gregorie.

Lectoribus

Lectoribus Mathematicis.

Supervacaneum eſſet (præclara Literarum lumina) de mirandis Optices Encomiis apud vos panegyricum inſtituere; viſum enim ſenſuum pulcherrimum adjuvat; myopibus & presbytis (abſq; Optices ope quodammodo cæcis) clariſſimum præbet viſum; oculos humanos ab hiſce terreſtribus, ad cæleſtia majoribus noſtris incognita, & incredibilia elevat; & ad perfectam minutiſſimorum corporum viſionem rurſus detrudit: Unde anſam præbet, omnes ſcientias naturales, & amplificandi, & promovendi. Nihilominus inter univerſas ſcientias Mathematicas, nulla ab antiquis adeo neglecta, & a paucioribus exculta: Omiſſis enim Euclide, Alhazeno, *&* Vitellione, *autheribus etiam perobſcuris & prolixis; e veteribus nullus aliquid momenti (quantum ſcio) nobis reliquit: E neotericis autem, poſt* Galilæum *ſidereum illum Mercurium, & omni ævo laudibus celebrandum, multi, & ſcriptis, & ſumptibus immenſis, in hac meſſe laudabiliter ſudarunt: inter quos ego, juvenili quodam ardore inſtigatus, & ex inventione inæqualitatis ellipticæ audaciam nactus, hiſce ſpeculationibus Opticis, & præcipuè geometricæ Teleſcopiorum demonſtrationi, pro facultate ingenii me accinxi; & ex analogiis in prima hujus tractatuli propoſitione declaratis, inveni primam hujus Opticæ partem, de genuinâ refractionum hypotheſi & menſurâ; neſcius ſcilicet (propter inopiam novorum librorum Mathematicorum, in aliàs inclytâ Bibliothecâ Abredonenſi) hæc eadem*

dem à Carteſio *fuiſſe inventa*: & *ope aliquot Lemmatum*, e Rivalti *Commentariis in* Archimedem *deſumptorum*, *Problemata ad 26 hujus adjunxi*: *ubi diu hæſi omni ſpe progrediendi orbatus*; *ſed continuis hortatibus*, & *auxiliis fratris mei* Davidis Gregorii *in Mathematicis non parùm verſati* (*cui*, *ſi quid in hiſce ſcientiis præſtitero*, *me illud debere non inficias ibo*) *animatus*, *tandem incidi in ſeriam imaginis conſiderationem*, & *deprehendi imaginem nihil aliud eſſe*, *quàm radiorum*, *ſingulorum viſibilis punctorum*, *a ſingulis aliis punctis in unâ ſuperficie exiſtentibus*, *divergentiam*: *quo perſpecto*, *ſingulis problematibus addidi ſua Corollaria*; & *adjunxi 26*, *27*, *penicillorum*, & *conorum radioſorum determinationi*; 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, *imaginis loco*, & *viſioni diſtinctæ*; 33 *imaginis illuſtrationi*; 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, *apicum*, *penicillorum* & *conorum radioſorum*, *loco inſervientes*. *Quibus præmiſſis*, *uſq*; *ad finem patent facillimæ* & *univerſaliſſimæ propoſitiones geometricè demonſtratæ*, *totam Catoptricorum*, & *Dioptricorum doctrinam*, *tam mediante diaphano denſiore*, *quàm rariore comprehendentes*: *e quibus emergunt infinita machinamenta Optica diverſa*, *partim antè cognita*, *partim incognita*. *Deinde appendicem aſtronomicam addo*; *in quâ*, *omnia deſiderata de parallaxium*, *eclipſium*, & *diametrorum apparentium obſervationibus*, *ope machinarum opticarum perficio*: & *Aſtronomorum opprobrium*, *nempe ſolis parallaxim diverſis modis invenire doceo*: *Et deniq*; *omnes planetarum inæqualitates ſcrutari multipliciter demonſtro*; *Lunam tantùm propter maximè irregularem motum vix tactam relinquens*. *His inquam molitus ſum præclara Mathemata propagare*: *quod ſi in noſtris lucubrationibus humanius quid acciderit*, *conatum ſaltem fovete*; & *ſervorum veſtrorum catalogo inſerite*.

Veſtri Obſervantiſſimum,

J. G.

Errata.

Pag. 9. l. 32 *sunt.* 10. 13, *æqualem.* 11. 30. *distantiam.* 12. 7. *æqualitatem.* 13. 16. *invenimus.* 17. 8. *quæ.* 20. 7. *quarta.* 21. 13. *ipsi.* 21. 32. *procedendum.* 22. 16. *quàm.* 40. 20. *oculo.* 45. 9. *ellipsin.* 45. 29. *sphæroidis.* 49. 12. *ellipsin.* 50. 7. *planum.* 27. 25. *congregandi.* 95. 35. *sphæroideon.* 100. 11. *apparentium.* 107. 22. *numerentur.* 115. 23. *evulgavit.* 127. 20. *dico.* 130. 4. *inveniantur.*

In Fig. pag. 49, loco E scribatur F.
In Fig. pag. 53, loco P scribatur K.
In Fig. 3 pag. 61, suppleatur D.

Definitiones.

Definitiones.

1. RAdii ſunt lineæ rectæ, in quibus diſcurrunt corpuſcula ignea, è corporibus lucidis ortum habentia.

2. *Materia radians*, eſt corpus opacum, & impolitum, corpuſcula ignea reflectens, & aliquem illis præbens ingreſſum.

3. *Color in oculum delatus*, eſt tinctura corpuſculorum igneorum, è materiâ radiante emergentium.

4. *Viſio* fit receptione horum corpuſculorum à materiâ radiante reflexorum, & colorem in oculum deferentium.

5. *Radii unius puncti*, ſunt qui ab uno materiæ radiantis puncto reflectuntur.

6. *Radii paralleli*, ſunt qui æqualiter ſemper a ſe invicem diſtant.

7. *Radii divergentes*, ſunt qui utrinque producti concurrunt in punctum, ad partes motui contrarias; & vocantur hi radii cono radioſus, & punctum concurſus apex coni.

8. *Radii convergentes*, ſunt qui utrinque producti concurrunt ad partes motus, & vocantur penicillum, & punctum concurſus apex penicilli.

Notandum tamen, paralleliſmum, divergentiam, & convergentiam, applicari tantùm unius puncti radiis.

9. *Imago* eſt ſimilitudo materiæ radiantis, orta ex divergentiâ, vel convergentiâ radiorum, ſingulorum materiæ radiantis punctorum, a punctis ſingulis, vel ad puncta ſingula unius ſuperficiei.

10. *Imago ante oculum*, oritur ex apicibus conorum radioſorum, ſingulorum materiæ radiantis punctorum, in unâ ſuperficie congregatis.

11. *Imago poſt oculum*, oritur ex apicibus penicillorum, ſingulorum

materiæ radiantis punctorum, in una ſuperficie congregatis; quæ non propriè dicitur imago, ſed tamen in Opticis, vix minorem habet efficaciam, quàm imago ante oculum.

12. *Viſibile eſt, ſive materia radians, ſive imago ante, ſive poſt oculum; ſæpius tamen uſurpatur, pro materiâ radiante, præſertim ubi ſermo etiam eſt de imagine.*

13. *Diameter viſibilis, eſt diſtantia inter qualibet duo puncta extrema, & oppoſita.*

14. *Centrum viſibilis, eſt diametri punctum medium.*

15. *Angulus viſorius, eſt angulus comprehenſus a duobus radiis, extremorum viſibilis punctorum, in centro oculi, ſe invicem ſecantibus.*

16. *Sectiones Conicæ ſunt, circulus, ellipſis, parabola, hyperbola, linea recta.*

17. *Sectionis conicæ linea, ſeu circumferentia, eſt communis ſectio plani ſecantis cum ſuperficie coni.*

18. *Linea recta dicitur eſſe circumferentiæ ſectionis conicæ perpendicularis; cum ſecat contingentem in puncto contactus ad angulos rectos.*

19. *Superficies conicæ, ſunt ſuperficies figurarum, ex revolutione ſectionum conicarum circa proprios axes, genitarum.*

20. *Speculum eſt corpus opacum, & politum, ab una ſuperficie conicâ comprehenſum.*

21. *Lens eſt corpus diaphanum, & politum, a duabus ſuperficiebus conicis, communem axem habentibus, comprehenſum.*

22. *Axis lentis, vel ſpeculi, eſt idem cum axe ſuperficierum conicarum, a quibus comprehenditur.*

23. *Vertices lentis, vel ſpeculi, ſunt eadem cum verticibus ſuperficierum conicarum, a quibus comprehenditur lens vel ſpeculum.*

24. *Vertex incidentiæ, eſt illa, in quam incidunt radii: vertex emerſionis, illa, ex qua emergunt: Unde patet, in ſpeculis has vertices eſſe unam; in lentibus vero diverſas.*

25. *Craſſities lentis, eſt verticum diſtantia.*

26. *Diameter lentis, vel ſpeculi, eſt diſtantia inter duo ipſius puncta extrema & oppoſita; & proinde centrum lentis, vel ſpeculi, eſt diametri punctum medium.*

27. *Angulus radioſus, eſt angulus comprehenſus a centro viſibilis, & diametro lentis, vel ſpeculi.*

28. *Axis*

28. *Axis penicilli, vel coni radiosi, est ille radius, qui ad superficiem ſpeculi, vel lentis, est rectus.*

29. *Imago prima, est illa, quæ immediatè ab oculo videtur; imago ſecunda, illa quæ mediante imagine prima ab oculo videtur; & ſic deinceps: Imago autem ultima, est imago visibilis primò projecta, & ideo mediantibus omnibus reliquis, in oculum allata.*

30. *Radii imaginis primæ, ſecundæ, tertiæ, ultimæ, &c. ſunt illi, qui ad imaginem primam, ſecundam, &c. convergunt, vel ab iisdem divergunt.*

31. *Vertex incidentiæ, imaginis primæ, ſecundæ, tertiæ, &c. est vertex incidentiæ, illius lentis, vel ſpeculi, in quam incidunt radii, imaginis primæ, ſecundæ &c. & eodem modo vertex earum emerſionis, est vertex emerſionis lentis, vel ſpeculi, ex quâ emergunt earum radii.*

32. *Teleſcopium, est machina optica, ex lentibus, vel ſpeculis, communem axem habentibus, compoſita; longinquorum efficiens accuratam viſionem.*

33. *Microſcopium, est machina optica, ex lentibus, vel ſpeculis, communem axem habentibus, compoſita; propinquorum efficiens accuratam viſionem.*

34. *Icoſcopium, est machina optica, ex lentibus, vel ſpeculis, communem axem habentibus, compoſita; viſibilium imagines in plano depingens.*

35. *Pertinens ad imaginem primam, ſecundam, tertiam, &c. est ſpeculum, vel lens, proficiens imaginem primam, ſecundam, tertiam, &c.*

36. *Preſbyti ſunt, qui remota diſtinctè vident; propinqua confuſè.*

37. *Myopes ſunt, qui remota confuſè vident; propinqua diſtinctè.*

Postulata.

1. *Radii non debilitantur, solâ distantiâ a radiante.*

2. *Radii non debilitantur, solâ reflectione a speculis; alioquin corpus annihilaretur, quod fieri non potest.*

3. *Radii debilitantur, sola refractione, quoniam eorum plerique in superficie diversorum diaphanorum communi, ad contrarias partes reflectuntur.*

4. *Radii visibilium longinquorum, sunt quo ad sensum paralleli.*

5. *E datis, axi, & focis sectionis conicæ, datur & ipsa sectio.*

Optica.

Optica Promota.

Propositio 1.

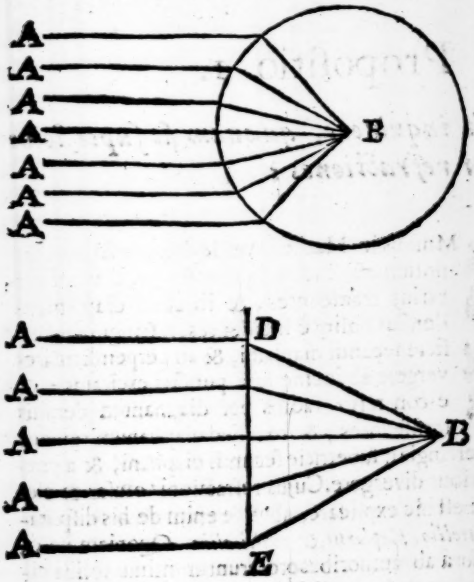
Propositum sit inquirere, quænam sit superficies quæ metitur refractiones?

OMnibus in Matheſi vel leviter verſatis, vulgo notum eſt, radios luminoſos per diaphanum rarius tranſeuntes, & in aliud diaphanum denſius obliquè incidentes, refringi in ſuperficie ſecundi diaphani, & ad perpendiculares vergere ab incidentiæ punctis excitatas; & è contrario radios per diaphanum denſius tranſeuntes, & in aliud diaphanum tenuius obliq; incidentes, refringi in ſuperficie ſecundi diaphani, & a prædictis perpendicularibus divergere. Cujus refractionis cauſas & elementa non noſtrum eſt hic explicare, abunde enim de his diſputarunt *Alhazenus, Vittellio, Keplerus, & multi alii*: Quoniam verò, quæ de earum menſurâ ab authoribus profaruntur minus ſolida videntur, paucula quædam de hac re (Mathematicis forſan non inutilia) in medium adducere conabimur. De his autem quæ altioris ſunt conſiderationis, liceat paululum analogicè diſputare, priuſquam ad ἀκρίβειαν geometricam accedamus.

Satis

Satis patet ex Opticis elementis, multa Catoptricæ, & Dioptricæ esse communia; forsan igitur, & in reflectionum, & in refractionum mensuris, aliquid commune hærebit: Totum autem reflectionum mysterium, in sectionibns conicis latere compertum est; (ut deinceps patebit) forte igitur & refractionum mensura illic latebit. Secundò non fit regularis reflectio, nisi superficies reflectionis sit sectio conica; fortassis ergo nec regularis refractio, nisi refractionis superficies, sit sectio etiam conica.

Si vero superficies reflectionis sit concavitas parabolæ, & radii incidentes axi paralleli, omnes reflectuntur in focum: Quæritur ergo num possit dari superficies refractionis, ita ut omnes radii in eam incidentes, speciali cuidam lineæ paralleli, refringantur in unum aliquod punctum determinatum?. ex prædictis probabile est(si talis detur) hanc superficiem esse conicam sectionem: ut autem talem superficiem analogicè inquiramus, ab extremis incipiatur; & concipiamus medium in quod incidunt radii esse densissimum; radii igitur refracti, ad superficiem medii perpendiculares erunt. (*Keplerus Ast. Opt. fo.* 113)



Quæritur igitur sectio Conica, cujus omnes perpendiculares ad sui lineam, in unum punctum concurrant? talis autem est circulus. Secundo concipiatur illud medium densissimum, per quod transeunt

ſeunt radii paralleli; & quoniam eiſdem lineis egreditur forma quibus ingreditur; ingreditur autem forma, lineis ſuperficiei perpendicularibus, ut hactenus dictum; ergo egrediuntur radii, ſive forma, e medio denſiſſimo lineis perpendicularibus: Quæritur igitur ſectio conica cujus omnes perpendiculares ad ſui lineam ſint paralleli? talis autem eſt linea recta. Supponendo igitur, radios parallelos quotcunq; A,A,A, *&c.* in uno plano, refringi in ſuperficie medii denſiſſimi, & ſuperficiem refractionis eſſe circulum; radii refracti concurrent in centrum circuli B:uni igitur ex extremis eſt ſatisfactum. Supponendo etiam radios quotcunq; ex puncto B exiſtente in medio raro prodeuntes, refringi in medio denſiſſimo cujus ſuperficies refractionis comprehendetur linea recta D E, omnes lineæ refractæ evadent parallelæ in medio denſiſſimo. Si verò hi radii paralleli in uno plano medii denſiſſimi, concipiantur in medii rarioris ſuperficie D E refringi, (quoniam iiſdem lineis egreditur forma quibus ingreditur) concurrent omnes radii A,A,A, *&c.* in punctum B; atq; ita alteri ex extremis eſt ſatisfactum. Si verò, rem diligenter quis intueatur, videbit (propter prædictas rationes) omnes radios, ſive parallelos, ſive non parallelos, in ſuperficiem refractionis circularem medii denſiſſimi incidentes, in circuli centrum concurrere. Quæritur autem unde hoc proveniat? Reſpondetur; videtur hoc provenire ex eo, quod quomodocunq; ducatur linea in circulum incidens, (dummodo cum circulo in eodem ſit plano) axis ipſi parallelus duci poſſit; concipiendo nimirum, circulum eſſe ellipſeos ſpeciem, quævis illius diameter poteſt dici axis; unde videtur, axem ſectionum conicarum, eſſe lineam ſpecialem quæſitam. Animadvertenti quoque patebit, omnes radios, in uno plano medii denſiſſimi parallelos, non in unum tantùm, ſed in quodlibet punctum aſſignatum, extra lineam D E, ad partes B concurrere: Quæritur etiam unde hoc proveniat? Reſpondetur; hoc videtur provenire ex eo quod, (ſupponens lineam rectam eſſe hyperbolam) quodlibet punctum extra ipſam poſſit ſumi loco foci; unde videtur focum eſſe punctum concurſus quæſitum. E duobus autem focis, vel realibus, vel imaginariis, is erit punctum concurſus, qui longiſſimè a radiorum incidentia diſtat, alioquin angulus refractionis eſſet major recto, quod fieri non poteſt. Hiſce de extremis prælibatis medium tentemus: Si autem radios provenientes e diaphano raro in denſiſſimum, & e diaphano

phano denſiſſimo in rarum extrema concipiamus; neceſſariò ſequitur radios ex uno diaphano, in aliud ejuſdem denſitatis incidentes, eſſe medium inter prædicta duo extrema; in hoc autem caſu nulla fit refractio; In parabola ergo (quæ media eſt inter circulum & lineam rectam) omnes lineæ axi parallelæ, & in eodem cum parabolâ plano, in ipſam incidentes, debent per refractionem concurrere in focum, a punctis incidentiæ maximè remotum: at focus iſte a vertice parabolæ infinitè diſtat; omnes igitur radii in parabolam incidentes, & ad prædictum focum imaginarium ducti, ſunt axi paralleli: ſi vero & ante, & poſt incidentiam, ſint axi paralleli, a refractione omnino ſunt liberi, quod eſt propoſitum. Concludimus igitur analogicè, pro omni diaphanorum diverſitate, inveniri poſſe ſuperficiem refractionis (quæ ſit ſectio conica) in quâ lineæ parallelæ in plano unius diaphani, in altero refractæ concurrant in punctum: quo autem denſius fuerit diaphanum in quo radii ſunt paralleli, & quo rarius diaphanum in quo concurrunt; eo propiùs accedit ſuperficies refractionis ad hyperbolarum obtuſiſſimam, id eſt lineam rectam: & e contra; quo rarius fuerit diaphanum, in quo radii ſunt paralleli, & quo denſius fuerit diaphanum, in quo concurrunt, eo propiùs accedit ſuperficies refractionis ad ellipſium obtuſiſſimam, id eſt circulum. Verùm relictis hiſce analogiæ nugis, ad experientiæ ſcientiarum originis certiora teſtimonia accedamus.

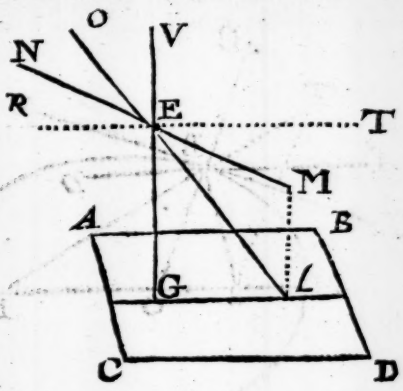
Prop. 2. Problema.

Refractiones cujuſcunq; diaphani ex aere invenire.

SIt planum aliquod A B C D ſtabilitum, & horizonti parallelum, vel eo circiter; ſitq; punctum aliquod firmiſſimè ſtabilitum in ſublimi poſitum E, & per punctum E concipiatur duci perpendicularis ad horizontem V E G, ſitque angulus incidentiæ in diaphano (cujus anguli refractio requiritur) G E L, qui faciè menſuratur aſtrolabio, vel quadrante: & in puncto L, figatur corpuſculum reſplendens, & tandem impleatur totum illud ſpatium inter planum A B C D, & punctum E, diaphano optimè polito, cujus ſuperficies ad E punctum, horizonti ſit exquiſitè parallela,

&

& aſpicienti per punctum E, apparebit reſplendens in M; explorato igitur angulo NEV, ſeu GEM; differentia inter illum, & priorem angulum OEV, ſeu GEL dabit angulum refractionis quæſitum NEO, competentem angulo incidentiæ NEV in aere, quod faciendum erat. Qui alios, refractionum angulos inveniendi, modos deſiderat, Vitellionem, Kepplerum, alioſque dioptrices auctores conſulat.

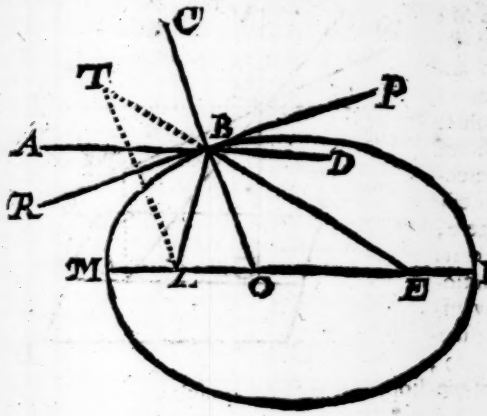


Prop. 3. Problema.

Datis duobus angulis, non obtuſis, invenire ellipſin, ut linea axi parallela, in eam incidens, efficiat cum tangente angulum, equalem complemento majoris, & recta a puncto incidentiæ ad focum maxime diſtantem, efficiat cum axe angulum æqualem minori.

SInt dati duo anguli ABC major, DBE minor, ſitque invenienda ellipſis tangens lineam RBP ad CB perpendicularem in puncto B, cujus axis rectæ AB ſit parallelus, & linea BE per focum maxime diſtantem tranſeat. Per punctum quodlibet lineæ EB, nimirum E, ducatur lineæ AB parallela, EO, quæ utrinque producatur: producatur CB in O, & ſit angulus OBL æqualis angulo OBE, ſitque MN æqualis EB & BL ſimul; quam dico eſſe axem ellipſeos quæſitæ, poſitis focis L & E: axe MN, & focis LE, deſcribatur ellipſis MBN quæ neceſſario tranſibit per punctum B; quoniam LB, BE ſimul ſint æquales axi MN (per converſum, 52 *lib.* 3. *Apoll.*) & quoniam anguli OBE, OBL ſunt æquales, ſi a rectis RBO, OBP auferantur,

rantur, relinquuntur anguli E B P, R B L æquales; tangit igitur linea R B P ellipſin in puncto B (per converſum 48 *lib.* 3. *Apoll.*) facitq; cum A B, axi M N parallela, angulum R B A æquam complemento anguli dati majoris A B C; & ob parallelismum linearum A D, M N, angulus ad focum remotiorem B E O, æqualis eſt angulo dato minori D B E quod erat faciendum.



Prop. 4. Theorema.

Iiſdem poſitis, dico ſinum differentiæ angulorum datorum, eſſe ad ſinum anguli majoris, ut focorum diſtantia, ad axem ellipſeos.

PRoducatur enim linea E B in T; ſitq; B T æqualis B L, & ducatur T L; erunt igitur anguli B T L, B L T, æquales, & L B E æquales ambobus ſimul, ergo & E B O ſemiſſis anguli E B L, æqualis erit angulo B T L, triangula igitur E B O, E T L ſunt æquiangula; eſt autem angulus B O L æqualis majori dato A B C, ob parallelismum linearum A B, M O, eſtque angulus B E O æqualis minori angulo dato D B E: B E O autem & O B E ſunt æquales angulo B O L; igitur angulus O B E, vel illi æqualis L T E, eſt differentia angulorum datorum A B C, D B E; eſt quoq; angulus T L M æqualis angulo B O L, vel majori dato A B C. Concludimus

cludimus ergo, ſinum differentiæ angulorum datorum, hoc eſt anguli L T E, eſſe ad ſinum anguli majoris dati nimirum T L M, ut diſtantia focorum L E, ad axem ellipſeos T E, quod erat demonſtrandum.

Prop. 5. Theorema.

Iiſdem poſitis; ſi angulus major fuerit angulus incidentiæ alicujus Radii e diaphano raro in denſum, & angulus minor refractio dicto angulo incidentiæ competens, fueritq; ellipſis inventa, ſuperficies refractionis ex eodem diaphano raro in denſum; dico omnes radios axi ellipſeos parallelos, & in ellipſins incidentes, in punctis incidentiæ Refringi, & in focum concurrere: Vocetur autem hæc ellipſis, ellipſis denſitatis prædictorum diaphanorum.

EX ſuperiore diſcurſu Analogico, videtur radios parallelos in uno plano diaphani rari, congregari in unum punctum diaphani denſioris, ſi modo ſuperficies refractionis ſit ellipſis certæ cujuſdam dimenſionis, quæ diaphanorum denſitati conveniat. Quoniam enim circulus congregat Radios Parallelos e medio raro in unum punctum medii denſiſſimi; Parabola vero congregat radios parallelos, ex uno diaphano in punctum imaginarium, alterius diaphani ejuſdem denſitatis, infinite diſtans; Sequitur igitur ellipſim, quæ media eſt inter haſce figuras, radios parallelos in plano diaphani rari, congregare in unum punctum diaphani mediocriter denſioris. His igitur prælibatis, ad demonſtrationem hujus Theorematis experimentalem accedamus; & ſupponamus verum eſſe, ut abſurdum (ſi quod lateat) patefiat. Obſervavit Vitellio refractionem aquæ, competentem angulo incidentiæ in aere, 30°: eſſe 7°: 30', & ex hac obſervatione per præcedens Theorema, ita inveniemus ellipſeos dimenſiones, ut ut 50000: ſinus anguli incidentiæ 30°: ad 38268 ſinum anguli refracti 22°: 30': ita 10000 axis ellipſeos, ad 7654 diſtantia focorum. Eredem Theoremate reliquas refractiones ita Computemus; ut 10000 axis ellipſeos ad 7654 diſtantiam focorum, ita 17365 ſinus anguli incidentiæ 10°, ad 13291 ſinum anguli refracti: 7°: 38': qui ablatus ab angulo incidentiæ 10°: relinquet angulum refractio-

 nis

nis 2°: 22′: differentem ab obſervatione, 2: 15′, niſi 7′: atque ita ſequentia Computavimus. Sed lectorem ne moveat hæc diſcrepantia, ob has rationes; Primo enim, ſatis apparet in obſervationibus Vitellionis eum obſervaſſe tantummodo ad graduum ſemiſſes; Et (ut notat Keplerus in *Aſtron. Opt. fol.* 116.) certum eſt ſuis ab experientia captis refractionibus, manum admoviſſe, ut in ordinem illas, per ſecundorum incrementorum æqualitem, redigeret: Omnia enim harum obſervationum incrementa ſurgunt per differentiam 30″. In Kercheri autem obſervationum diffe-

Refractiones a Vitellione obſervatæ & earum a noſtro Calculo Diſcrepantia.

Ang. incidentiæ in aere.	Refractiones aquæ ex aere. Obſerv.	Calcul.	Differ.	Refractiones vitri ex aere. Obſerv.	Calcul.	Differ.	Refractiones vitri ex aqua. Obſerv.	Calc.	Diff.	Angulli incidentiæ in aqua.
	° ′	° ′	′	° ′	° ′	′	° ′	° ′	′	
10	2 15	2 22	+ 7	03 00	03 20	+ 20	00 30	01 12	+ 42	10
20	4 30	4 50	+ 20	06 30	06 48	+ 18	01 30	02 27	+ 57	20
30	7 30	7 30	0 0	10 30	10 30	00 00	03 00	03 50	+ 50	30
40	11 0	10 32	— 28	15 00	14 35	— 25	05 00	05 28	— 28	40
50	15 0	14 6	— 54	20 00	19 14	— 46	07 30	07 30	00 00	50
60	19 30	18 29	— 61	25 30	24 40	— 50	10 30	10 12	— 18	60
70	24 30	24 1	— 29	31 30	31 08	— 22	14 00	14 02	+ 02	70
80	30 0	31 5	+ 65	38 00	38 58	+ 54	18 00	19 34	+ 94	80

Refractiones ab Athanaſio Kerchero obſervatæ, & ſecundum Methodum noſtram Calculatæ cum Differentiis.

Angulli incidentiæ in Aere.	Refractiones aquæ. Obſer.	Calc.	Diff.	Refractiones vini. Obſer.	Calc.	Diff.	Refractiones olei. Obſer.	Calc.	Diff.	Refractiones vitri. Obſer.	Calc.	Diff.
°	° ′	° ′	′	° ′	° ′	′	° ′	° ′	′	° ′	° ′	′
10	2 20	2 25	+ 5	2 30	2 28	— 2	2 50	2 33	— 17	3 10	3 27	+ 17
20	4 38	4 56	+ 18	4 45	5 3	+ 10	5 10	5 12	+ 2	6 40	7 1	+ 21
30	7 40	7 40	0 0	7 50	7 50	0 0	8 4	8 4	0 0	10 50	10 50	0 0
40	11 9	10 45	— 24	11 4	10 59	— 5	11 50	11 18	— 32	15 8	15 2	— 6
50	15 6	14 24	— 42	15 10	14 41	— 29	16 10	15 5	— 65	20 12	19 48	— 24
60	19 40	18 50	— 50	19 50	19 12	— 38	20 20	19 42	— 38	25 50	25 20	— 30
70	24 40	24 26	— 14	24 50	24 50	0 0	25 12	25 25	+ 13	31 10	31 54	+ 44
80	30 4	32 33	+ 89	30 10	32 0	+ 110	30 54	32 38	+ 104	38 10	39 43	+ 93

rentiis

rentiis nulla est vel ordinis umbra; ita ut extra omne dubium sit, illius observationes esse fallaces. Nec sane mirum videbitur (si quis rem accuratius intueatur) differentias quasdem in tam subtili disquisitione irrepsisse; ubi levis error in calculationum radice, in processu multiplicatur. Hujus autem Theorematis veritas, per varia experimenta nobis multoties emicuit: veluti ex hoc unico, quod ad aquam fontanam habuimus, apparebit; ubi per primum nostrum problema fideliter, &(pro instrumenti magnitudine) satis subtiliter, ad angulos incidentiæ in aqua 10°, 20°, 30°, 40°, 45°: tales juvenimus refractiones. Si vero curiosis ingeniis hæ observationes non satisfecerint; agite Mathematici, & subtilioribus observationibus, hanc pulcherrimam Dioptrices speculationem confirmate.

Refractiones aquæ fontanæ a nobis Observatæ cum earum a Calculo Differentiis.

Ang. inciden. in aere.		Refract. Observ.		Refract. Calcul.		Differentia.	
°	′	°	′	°		′	
13	28	03	28	03	25	—	03
26	48	05	48	07	03	+	15
41	50	11	50	11	50	00	00
59	12	19	12	19	07	—	05
71	20	26	20	26	05	—	15

Corollarium.

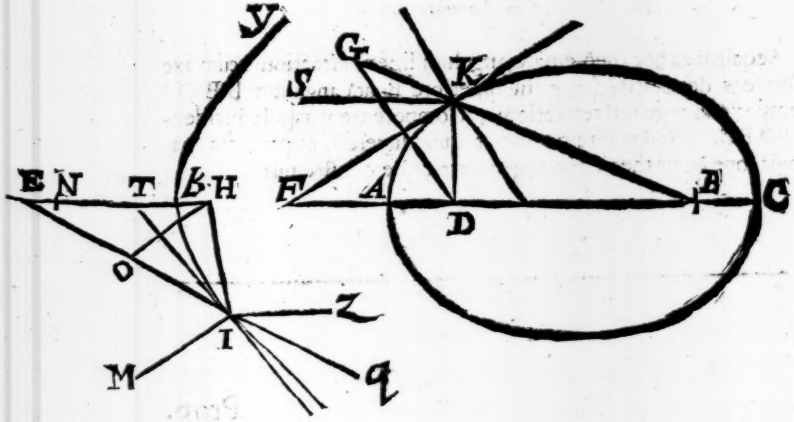
Sequitur ex hoc theoremate, angulum lineæ refractionis cum axe ellipseos densitatis, (*v. g.* in superiore figura angulum B E O) semper esse angulum refractionis, Competentem angulo incidentiæ A B C. Restat autem nunc ut quod supereſt, ex prædicta analogia, ope hujus theorematis, geometrice demonstremus.

Prop.

Prop. 6. Theorema.

Si fuerit; ut axis ellipſeos denſitatis duorum diaphanorum, ad diſtantiam focorum ejuſdem, ita Diſtantia focorum Hyperbolæ, ad ſui axem; fueritq; hyperbola ſuperficies refractionis Radiorum ex foco ſuo exteriore, in diaphano rariore exiſtente: Omnes dicti radii, per refractionem in ſuperficie denſioris diaphani, ad Parallelíſmum reducentur. Vocetur autem hæc hyperbola; hyperbola Denſitatis prædictorum Diaphanorum.

SIt ut A C, axis Ellipſeos denſitatis duorum diaphanorum quorumcunq; A K C, ad B D, diſtantiam focorum, ita E H, diſtantia focorum hyperbolæ, ad L N, axem ejuſdem: ſitq; Hyperbola I L Y ſuperficies refractionis, in quam incidat Radius E I ex foco exteriore E, in diaphano rariore exiſtente, in punctum I, exiſtens in ſuperficie diaphani denſioris, & refrangatur linea E I in Z, ita ut angulus Q I Z, ſit angulus refractionis: Dico I Z eſſe parallelam axi Hyperbolæ E N L H. Ducatur enim per



punctum

punctum I, linea I T, tangens Hyperbolam I L Y in puncto I, & a puncto I ducatur lineæ I T perpendicularis, IM, eritq; E I M angulus incidentiæ, cui fiat æqualis ex foco ellipseos D, angulus G D F, & ducta recta B G, axi A C æquali; ex præcedente corolario evidens est, angulum G B D esse æqualem angulo refractionis Q I Z, competentem angulo incidentiæ G D F, seu E I M: fiat itaq; I O æqualis rectæ I H, & jungatur O H; eritque E O æqualis axi, hyperbolæ N L, & I T dividens angulum H I O bifariam, est perpendicularis ad O H; sed & perpendicularis est ad I M; igitur I M, O H, sunt parallelæ, & angulus E I M æqualis angulo I O H: sed E I M, est æqualis angulo G D F, igitur & I O H eidem G D F est æqualis. In triangulis igitur E O H, BDG, duo latera H E, E O sunt proportionalia duobus lateribus G B, B D, & angulus H O E, æqualis angulo GDB, ergo & angulus G B D, est æqualis angulo H E O, hoc est angulus Q I Z, æqualis angulo Q E H, parallelæ igitur sunt I Z, & E H, quod erat demonstrandum. *Ap.* 3. 51. *Ap.* 3. 48. 6. 6.

Scholium.

Poterat etiam & hyperbola denſitatis per experientiam primo inveniri, & ellipſis demonſtratione Geometrica ex ea deduci; Nos autem, hæc ſcripſimus eadem Methodo, qua a nobis reperta ſunt.

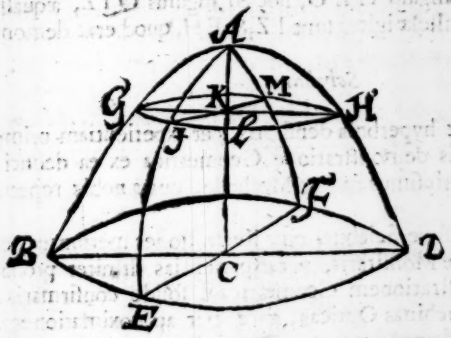
Atque hiſce de ſuperficiebus, quæ Refractiones metiuntur per analogiam clariſſime Monſtratis, per experientias firmiter probatis, & per demonſtrationem Geometricam ſolide confirmatis: Reſtat nunc ut Machinas Opticas, ante per approximationem, nunc Geometrice demonſtremus. Quoniam vero, hactenus de ſuperficiebus refractionum tantum, loquuti ſumus; oportet ut aliquot Lemmata præmittamus, quorum ope a ſuperficiebus ad ſolida, (qualia nimirum ſunt omnia Machinamenta optica) liceat Progredi.

Prop.

Prop. 7. Lemma.

Omnis conois, vel Sphærois, per axem ſecta, reddit eandem coni ſectionem, ex qua eſt genita: Sectionis autem axis, idem eſt cum axe Conoidis, vel Sphæroidis.

SIt Conois, vel Sphærois quælibet A B C D, cujus axis A C, per quem plano ſecetur, fiatq; ſectio E A F C: Dico ſectionem E A F C, eſſe eandem ſectionem Conicam, ex qua eſt genita Conois vel Sphærois A B C D: cujus etiam ſectionis conicæ dico A C eſſe axem. Intelligatur A B C D ſectio conica, ex cujus revolutione genita eſt figura: etenim ſi ipſa A B C D revolvatur, quoad incidat in locum ſectionis AECF, aut tota toti conveniet, aut ab ipſa A E C F diſcrepabit: ſi conveniat, eadem eſt A E C F, ac ipſa A B C D, & utriuſq; idem eſt axis A C, ut intendimus: ſi diſcrepet aliqua parte, ſequetur aliquid eſſe in figura, quod a ſectionis conicæ A B C D revolutione, non eſt conſtitutum, quod eſt abſurdum. Non ergo diſcrepabunt, & igitur equales ſunt, habentq; axem communem A C; quod demonſtrandum erat.



Prop. 8. Lemma.

Conoide, vel Sphæroide, ſecta plano ad axem perpendiculari; ſectione fit Circulus, Centrum habens in axe.

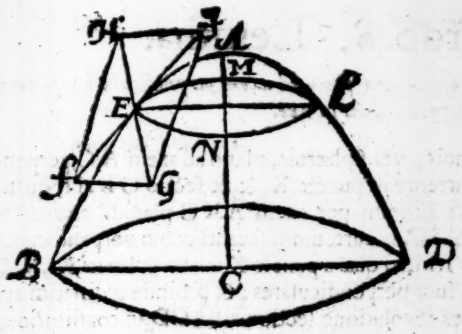
Dividatur Conois, vel Sphærois, plano ad axem A C perpendiculari, occurrente in puncto K, & fit ſectio G L H I, quam dico eſſe circulum: Etenim per axem A K C planum agatur faciens ſectionem B A F C, occurrentem ſecanti plano perpendiculari ad axem, in punctis I, M, ad quæ a puncto K ducantur lineæ, K I, K M, qui ad axem A K C ſunt perpendiculares; & proinde ordinatim applicatæ: cum enim ex revolutione ſectionis B A C D, in conſtitutione figuræ, factus ſit circulus B E D F, cujus radii ſunt C B, C E, C D, C F, ad axem recti, & proinde ordinatim quoque applicati; igitur unuſquiſque trium Radiorum æqualium C B, C E, C D, habet ad quamlibet ſibi parallelam lineam e tribus K G, K I, *Ap. 1. 21.* K H, eandem rationem, unde patet (cum C B, C E, C D ſint æquales) & K G, K I, K H eſſe æquales; igitur circulus eſt *3. 9.* G M H L I, cujus centrum K, in axe conoidis vel ſphæroidis; quod demonſtrandum erat.

Prop. 9. Lemma.

Si Conoidem, vel Sphæroidem, tangat planum, & per punctum contactus, & axem, ducatur aliud planum; Dico hæc duo plana ſe invicem normaliter ſecare.

Sit Conois, vel Sphærois A B D, quam tangat planum H I G F in puncto E, perque punctum E, & axem figuræ producatur planum B E A L D, donec ſecet planum H I G F in recta I F. Dico plana H I G F, B E A L D, ſe invicem normaliter ſecare. Per punctum E ducatur planum E M L N, perpendiculare ad axem A C, & producatur, donec ſecet planum H I G F in recta G H; & quoniam H G tangit circulum E M L N, erit ad ipſius diame- *8 Hujus.* trum E L perpendicularis; & quia plana B A D, E M L, ſe *3. 18.* invicem ſecant normaliter, & H G in plano E M L N, eſt per-

 pendicularis



pendicularis ad communem ſectionem E L; erit H G perpendicularis ad planum ABD: ergo & omnia plana per H G ducta, (e quorum numero eſt planum HIGF) ad planum B A D, erunt normalia; quod erat demonſtrandum.

11.11.

Scholium.

Hæc tria Lemmata, eodem fere modo demonſtrantur, in omnibus ſolidis ex circumvolutione genitis.

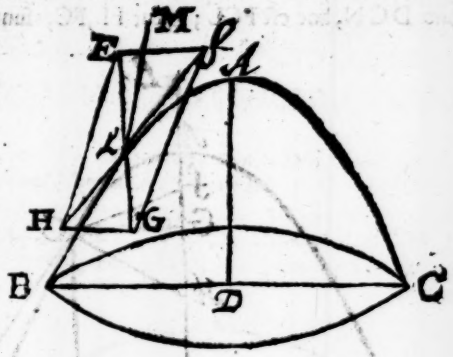
Prop. 10. Theorema.

Si ſuperficies denſi, aut Politi, fuerit ſuperficies Conoidis, aut Sphæroidis, fueritque linea incidentiæ in eodem plano cum axe Conoidis, vel Sphæroidis: ſectio Conica, ex qua genita eſt Conois, vel Sphærois, ſemper erit ſuperficies Reflectionis, vel Reflectionis.

SIt Conois, vel Sphærois A B C, denſum vel politum; cujus axis A D, ſitque linea M L in eodem cum axe plano, incidens in ſuperficiem denſi, vel politi in puncto L: Dico ſuperficiem reflectionis, vel refractionis, lineæ incidentiæ M L, eſſe eandem ſectionem conicam, ex qua deſcribitur Conois, vel Sphærois. Ducatur planum F E H G, tangens Conoidem, vel Sphæroidem in puncto L: & patet ex doctrina opticorum illud planum eſſe ſuperficiem reflectionis, vel refractionis, lineæ incidentiæ M L, quod perpendiculariter ſecat planum FEHG, in puncto L, ita ut linea incidentiæ M L, in eo exiſtat: Si vero per axem A D,

&

& lineam incidentiæ M L, ducatur planum B A F L H C; erit illud ad planum F E H G perpendiculare, & transibit per punctũ L, ideoque erit superficies reflectionis, vel refractionis lineæ incidentiæ M L; est autem sectio conica, ex qua describitur Conois, vel Sphærois: quod erat demonstrandum.



9. Hujus.

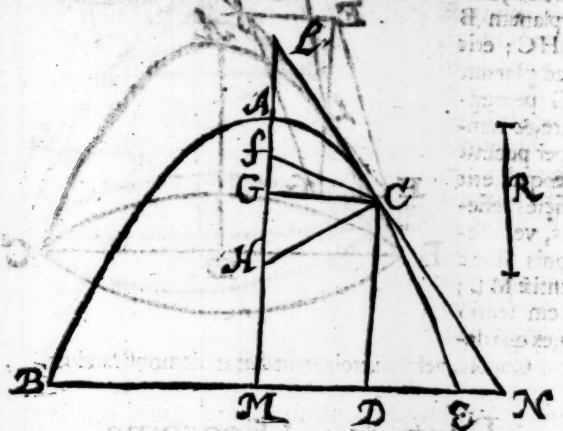
7. Hujus.

Prop. 11. Theorema.

Si parabolam recta linea tangat, & a tactu ducatur una recta intra parabolam axi parallela, alia vero ad eadem partes, faciens angulum cum contingente, equalem prioris angulo cum contingente; dico hanc lineam secundam, secare axem parabolæ intra parabolam, ita ut linea inter verticem & intersectionem, semper æqualis sit quadranti lateris Recti. Dicitur autem intersectionis punctum, focus Parabolæ.

HAnc Pulcherrimam conclusionem, primus quod sciam invenit Vitellio, sed quoniam jucundum omisit Corollarium, nos aliter, & forsan facilius, hanc ipsam demonstrabimus. Sit Parabola B A C E, cujus axis L A M, tangatque eam linea L C N, in puncto C, a quo ducatur axi parallela C D, fiatque angulo D C N, æqualis L C F, dico A F esse æqualem quadranti lateris recti R. Sint ordinatim applicatæ G C, M E, perpendicularis ad contingentem C H, eruntque hæ lineæ proportionales R: GC::GC: GA=AL, & HG: GC:: GC: GL; ergo GL: GA::R: HG; Sed GL est dupla lineæ G A, ergo R est dupla lineæ H G:

& quoniam LM, CD, sunt parallelæ; erit angulus FLC, æqualis angulo DCN, hoc est FCL; igitur FL, FC, sunt æquales: sunt



etiam anguli DCH, CHF, FCH, æquales; ergo FH, & FC, sunt æquales, & consequenter FL & FH: si igitur duplorum LH, LG, sumantur dimedia LF, LA; erit AF differentia dimediorum, semissis GH differentiæ duplorum; est autem GH semissis lateris recti R; ergo & AF est quanta pars lateris recti: quod erat demonstrandum. Eadem etiam facilitate demonstrabitur hoc Theorema in duobus Reliquis casibus, quos brevitatis gratia prætermittimus. 5. 19.

Corollarium 1.

Sequitur ex hoc Theoremate; DC + CF esse æquales MA + AF; sunt enim DC + CF æquales MG + FH, hoc est MF + GH; est autem GH dupla ipsius FA; ergo DC + CF = MF + 2FA = MA + AF, quod est propositum. Ex hoc corollario, datur facillimus modus describendi parabolam in plano, quem attigit *Keplerus in Ast. Opt.*

Corollarium 2.

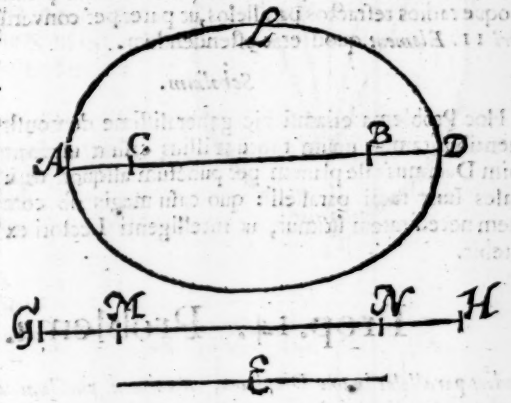
Ex hoc Theoremate sequitur secundo, omnes radios axi parallelos

lelos reflecti in focum parabolæ, ſi modo ſuperficies reflectionis fuerit concavitas parabolæ.

Prop. 12. Problema.

Ex datis poſitione, uno foco, una vertice, cum ellipſeos, vel hyperbolæ ſpecie; Ellipſem vel Hyperbolam invenire.

SIt A vertex ellipſeos A L D, B focus, ſitque ut E ad G H, ita diſtantia focorum ellipſeos A L D, ad ipſius axem: quæritur illius axis, & focorum diſtantia. Ex G H auferatur M N, æqualis ipſæ E, ita ut G M ſit æqualis N H, fiatque ut G N, ad G H, ita A B, ad A D; ſitq; A C, æqualis ipſi B D: Dico A D eſſe axem ellipſeos A L D, & C, B, illius focos.



Quoniam enim ut G N: G H:: A B: A D; erit ut
G N: A B:: G H: A D; & ut
G H: A D:: N H: B D; 5. 19.
G H: A D:: 2 N H: 2 B D;
G H: A D:: M N=E: C B; hoc eſt 5. 19.
E: G H:: C B: A D;

quod erat oſtendendum. Eodem etiam modo eſſet præcedendum, ſi A eſſet focus Hyperbolæ, B vertex, E ad G H, ratio axeos ad diſtantiam focorum, eſſetque A D diſtantia focorum, & C B axis.

Prop.

Prop. 13. Problema.

Radios parallelos in uno Diaphano, per aliud diverſæ denſitatis, æqui diſtantes mittere.

SIt communis ſuperficies Diaphanorum diverſarum denſitatum plana, radii igitur paralleli, in ſuperficiem planam incidentes, undique ſortiuntur æquales incidentiæ angulos, ac proinde æquales quoque refractiones, omnes ergo eorum anguli refracti ſunt æquales, qui cum fiant in ſuperficiebus refractionum parallelis efficiunt quoque radios refractos parallelos, ut patet per converſum *Prop.* 10. *libri* 11. *Element.* quod erat oſtendendum.

Scholium.

Hoc Problema etiamſi hic generaliſſime demonſtretur, in ſequentibus tamen unum tantum illius caſum uſurpamus; ſemper enim Ducimus tale planum per punctum aliquod datum, cui normales ſunt radii paralleli: quo caſu magis ob commoditatem, quem neceſſitatem utimur, ut intelligenti Lectori ex ſequentibus patebit.

Prop. 14. Problema.

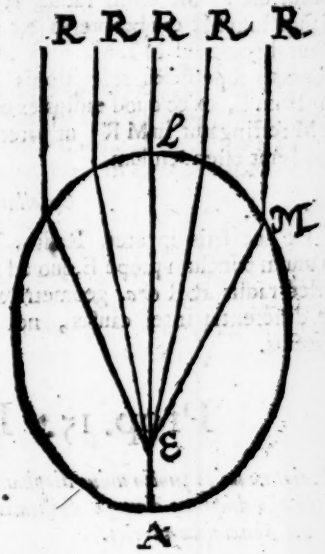
Radios parallelos in uno Diaphano, in unicum punctum datum Diaphani diverſæ denſitatis congregare; Data quoque Conoidis, vel Sphæroidis vertice: oportet autem, ut linea, ducta per punctum congregationis, & verticem datam, ſit radiis datis parallela.

SInt primo radii in Diaphano rariore paralleli, R,R, *&c.* congregandi in Diaphani denſioris punctum E; ſitque Sphæroidis vertex L; foco remotiore E, & vertice L, fiat horum diaphanorum ellipſis denſitatis L M A; & manente axe L E A, radiis datis parallelo, ex ellipſeos circumvolutione fiat Sphærois L M A, cujus materia ſit ex prædicto diaphano denſo: dico omnes radios axi Sphæroidis parallelos, (e quorum numero ſunt R R &c.) in

12. *Hujus.*

Sphæ-

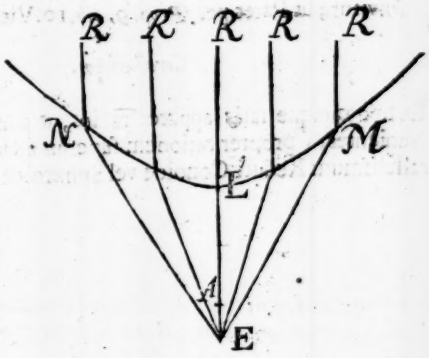
Sphæroidem incidentes, in ſuperficie Sphæroidis refringi, & in focum E concurrere: Sit enim Radius R M, unus e parallelis, incidens in punctum M, qui erit in eodem plano cum axe, ex eo quod ſit illi parallelus; erit igitur Ellipſis L M A (ex cujus circumvolutione genita eſt ſphærois L M A) ſuperficies refractionis radii R M; refringetur igitur R M in focum E; quod oſtendendum erat.



10. *Hujus.*

5. *Hujus.*

Secundo; Sint radii in diaphano denſiore Paralleli R R *&c.* congregandi in diaphani rarioris punctum datum E: Siteq; Conoidis vertex L: foco remotiore E, & vertice L, fiat horum diaphanorum Hyperbole denſitatis N L M: & manente axe E A L radiis datis Parallelo, ex circumductione hyperbolæ N L M, fiat Conois hyperbolica, cujus materia ſi fuerit ex prædicto denſo; dico omnes radios in ipſa parallelos, in ipſius



12. *Hujus.*

ſuper-

superficie refringi,& in focum E, in diaphano Rariore existentem, concurrere: Sit enim radius R M, unus e parallelis incidens in punctum M, qui propterea est in eodem cum axe plano: erit igitur hyperbola N L M, (ex cujus circumductione genita est
10 *Hujus.* Conois) superficies refractionis Radii R M; qui refringetur in
6 *Hujus.* punctum E, ex eo quod radius ex puncto E egrediens, & incidens in M refringatur in M R; ut patet per *Prop.* 9. *lib.* 10. Vitellionis quod erat ostendendum.

Corollarium.

Ex hoc satis apparet, Radios Parallelos R R *&c.* congregari in unum punctum prope E, quo ad sensum; etiamsi L E non æqui distet radiis R R *&c.* geometrice; Quoniam si non sit sensibilis differentia inter causas, nec erit sensibilis differentia inter effectus.

Prop. 15. Problema.

Radios ex unico puncto unius diaphani provenientes, ad Paralleliſmum in alio diaphano diverſa denſitatis reducere; data quoque Conoidis, vel Sphæroidis vertice.

PRoblema hoc, converſum eſt antecedentis, eodemque modo ſolvitur; ut Patet per *Prop.* 9. *lib.* 10. Vitellionis.

Corollarium.

Ex hoc quoque ſatis apparet radios, e puncto aliquo prope E provenientes, (propter rationem ſuperius allatam) ſenſibiliter ad paralleliſmum Reduci Conoide vel Sphæroide N L M.

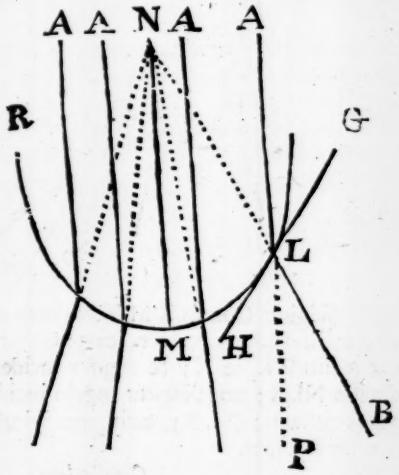
Prop.

Prop. 16. Problema.

Radios parallelos in uno diaphano, ad divergentiam, in alio diaphano alterius denſitatis, ab aliquo puncto dato reducere; data quoque Conoidis, vel Sphæroidis vertice: Oportet autem, ut linea per verticem, & punctum datum ducta, ſit radiis datis parallela.

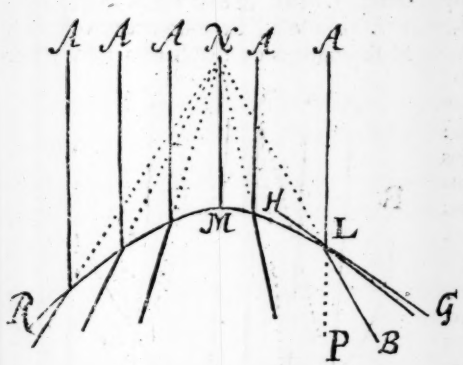
SInt radii Paralleli in Diaphano rariore **A A** *&c.* ita refringendi, ut appareant divergere ex puncto N; data quoque Sphæroidis vertice M. Foco remotiore N, & vertice M, fiat ellipſis denſitatis horum diaphanorum L M R, & ejus axe N M immobili manente, radiis A, A, *&c.* parallelo, ex ejus circumvolutione deſcribatur Sphærois L M R conſtans ex diaphano rariore; ſpatium vero in quo eſt Sphærois, conſtet ex diaphano denſiore: Dico omnes radios A, A, *&c.* in Sphæroidis ſuperficiem incidentes, in ipſius ſuperficie refringi, & a foco N divergere: Sit enim e radiis AA&c. unus AL, incidens in Sphæroidis ſuperficiem in puncto L, & producatur in P, ducaturque contingens Sphæroidem in puncto L, linea HLG, in plano ellipſeos, per axem Sphæroidis, & punctum L, tranſeuntis, quæ ellipſis eſt ſuperficies refractionis, ſitque RML; & ducatur ex puncto N, per punctum contactus L, linea NLB: Si igitur Sphærois LMR, eſſet diaphanum denſius, & includeretur diaphano rariore, ex quo nunc conſtat; tunc angulo

12. *Hujus.*



10 *Hujus.*

5. *Hujus.* incidentiæ HLP, competeret refractio NLA; ergo & æquali angulo incidentiæ ALG, competit æqualis refractio PLB; refringitur ergo radius A L in B, divergens a puncto N, quod ostendendum erat. Sint secundo radii paralleli in diaphano densiore A A *&c.* ita refringendi, ut appareant divergere e puncto N; Data quoque Conoidis vertice M: foco remotiore N, & vertice M, fiat hyperbola densitatis horum diaphanorum LMR, ex cujus circumvolutione, axe NM radiis datis parallelo manente, fiat Conois Hyperbolica RML; ita ut spatium extra Conoidem, (ubi nimirum sunt radii paralleli A A *&c.*) constet ex diaphano densiore, ipsa vero Conois ex diaphano rariore. Dico omnes radios A A *&c.* refringi in superficie Conoidis RML, & divergi a puncto N. Sit enim ex illis unus, radius AL, cujus superficies refractionis est ipsa hyperbole RML, ex qua describitur Conois; & per punctum incidentiæ L, ducatur tangens hyperbolam Recta HLG, & producatur AL, in P, & a puncto N, per L ducatur recta NLB; Si igitur Conois RML constaret ex diaphano densiore, & existeret in diaphano rariore, ex quo nunc constat; tunc refrangeretur radius PL, in N; & angulo incidentiæ PLG, competeret refractio NLA; æquali igitur angulo incidentiæ ALH, competit æqualis refractio PLB; refringitur igitur radius AL in B; quod erat ostendendum.



10. *Hujus.*

6. *Hujus.*

Corollarium.

Hinc quoque satis patet radios A A *&c.* Parallelos, divergi ab aliquo puncto circiter N, quo ad sensum; etiamsi linea NM non sit radiis A A *&c.* geometrice parallela.

Prop.

Prop. 17. Problema.

Radios in uno diaphano, ad unicum punctum datum convergentes, ad parallelissimum in alio diaphano diversa densitatis reducere; data quoq; Conoidia, vel Sphæroidis vertice.

HOc Problema est conversum quoque antecedentis, eodemque modo solvitur; ut patet ex *Prop. 9. lib.* 10. Vitellionis.

Corollarium.

Ex hoc etiam evidens est, radios ad punctum aliquod prope N convergentes, ad parallelissimum reduci quo ad sensum, Conoide, vel Sphæroide L M R.

Scholium.

Huc usque loquuti sumus de unica tantum refractione, quæ fit in superficie Conoidis, vel Sphæroidis; nunc vero loquimur de duplice refractione lentium (una fit in radiorum incidentia, altera in radiorum emersione) quæ ex fructis Conoideon, vel Sphæroideon componuntur, easdem semper conclusiones demonstrando, & in speculis, & in lentibus; ut appareat admiranda Harmonia, inter Catopticam, & Dioptricam.

Prop. 18. Problema.

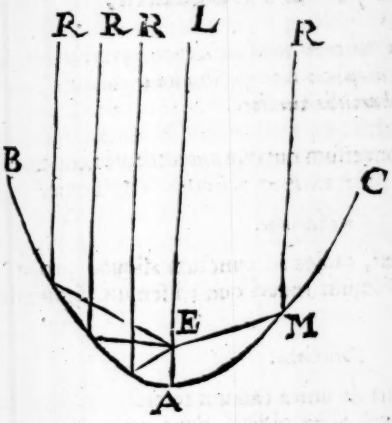
Radios parallelos, in unicum punctum datum ejusdem diaphani congregare; datis quoque lentis vel Speculi verticibus: oportet tamen, ut linea ducta per vertices lentis, vel Speculi, & punctum concursus radiis datis parallela.

Catoptrice.

SInt radii paralleli R R *&c.* in unum punctum E congregadi, sitque vertex speculi A: foco E, & vertice A, fiat speculum parabolicum concavum B A M C; dico omnes radios R R *&c.* in hoc speculum incidentes reflecti in ipsius focum E. Sit enim M

punctum incidentiæ radii R M, & quoniam A E axis ſpeculi, & Radius R M, ex ſuppoſitione ſunt parallelæ; erunt in eodem plano; & parabola BAC ex cujus circumvolutione eſt genitum ſpeculum BA MC, erit ſuperficies reflectionis; radius igitur R M reflectetur in focum E, quod erat oſtendendum.

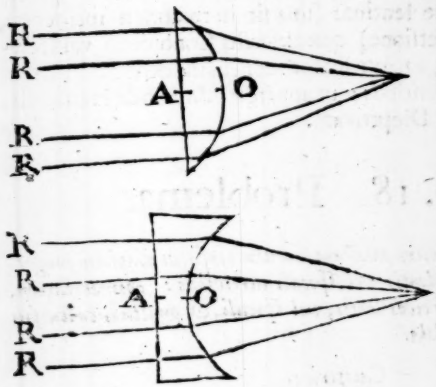
10. *Hujus.*
Coro. 2.
11. *Hujus.*



Dioptrice.

Sint radii R R *&c.* paralleli in unum punctum E congregandi, ſitque Lentis vertex incidentiæ A, emerſionis O. Radii RR *&c.* ope planæ lentis ſuperficiei per A ductæ, cui ſunt normales radii RR, intra lentem paralleli mittantur; & intra lentem paralleli, in E punctum congregentur, ope conoidis, vel ſphæroidis, cujus vertex O; quod erat faciendum.

13. *Hujus.*
14. *Hujus.*



Corollarium.

Ex hoc etiam ſequitur, radios parallelos congregari in unum punctum circiter E, etiamſi radii non ſint geometrice paralleli rectæ A E.

Prop.

Prop. 19. Problema.

Radios ex unico puncto dato divergentes, ad parallelismum reducere, in eodem diaphano; datis quoque lentis vel ſpeculi verticibus: Oportet autem, ut vertices lentis, & punctum divergentiæ, ſint in eadem recta linea.

HOc Problema eſt converſum antecedentis, eodemque modo perficitur; ut patet ex *Prop. 9. lib. 10.* Vitellionis.

Corollarium.

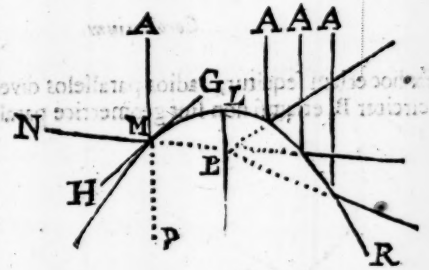
Ex hoc etiam ſequitur, radios divergentes ab aliquo puncto circiter E, fieri parallelos ope lentis, vel ſpeculi ſupradicti.

Prop. 20. Problema.

Radios parallelos, ad divergentiam in eodem diaphano a quocunque puncto dato reducere; datis quoque lentis, vel ſpeculi verticibus: Oportet tamen, ut recta per vertices, & divergentiæ punctum ducta, ſit radiis datis parallela.

Catoptrice.

SInt radii paralleli A A *&c.* ita reflectendi, ut appareant divergi e puncto B, ſitque data ſpeculi vertex L. Vertice L, & foco B, deſcribatur ſpeculum parabolicum convexum M L R, intercipiens radios parallelos AA *&c.* quos radios in ſuperficiem M L R incidentes, dico in

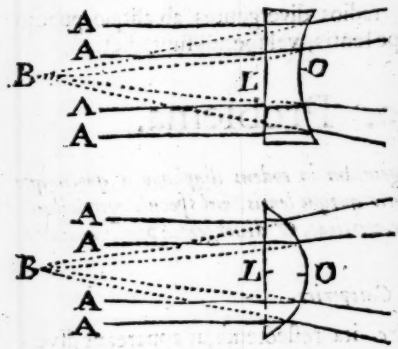


ipſa

ipsa reflecti, & divergi a puncto B. Sit enim ex illis, unus AM incidens in punctum M; qui, quoniam axi Conoidis est parallelus,
10. *Hujus.* habebit parabolam MLR (ex qua describitur Conois) superficiem reflectionis: ducatur per M linea HMG tangens parabolam MLR in M, & producatur radius AM in P, & ex B ducatur
11. *Hujus.* BN, per punctum M; & erit angulus BMG, æqualis angulo PMH, hoc est NMH, æqualis angulo AMG; reflectitur igitur AM in N: quod erat ostendendum.

Dioptrica.

Sint radii paralleli AA *&c.* ita refringendi, ut divergant ex puncto B; lente cujus vertex incidentiæ L, emersionis autem O. Radii AA *&c.* ope planæ lentis superficiei, per L ductæ (cui normales sunt ipsi radii) intra lentem
13. *Hujus.* paralleli mittantur, & intra lentem paralleli, ex B puncto divergantur, ope Conoidis, vel Sphæroidis, cujus vertex O: quod erat faciendum.



16. *Hujus.*

Corollarium.

Ex hoc etiam sequitur, radios parallelos divergi ex aliquo puncto circiter B, etiamsi non sint geometrice paralleli ipsi BL.

Prop.

Prop. 21. Problema.

Radios ad unicum punctum datum convergentes, ad parallelissmum in eodem diaphano reducere; datis quoque lentis, vel speculi, verticibus: oportet tamen ut vertices lentis, & punctum convergentiæ sint in eadem recta linea.

HOc Problema est conversum antecedentis, eodemque modo solvitur, ut patet ex *Prop. 9. lib. 10.* Vitellionis.

Corollarium.

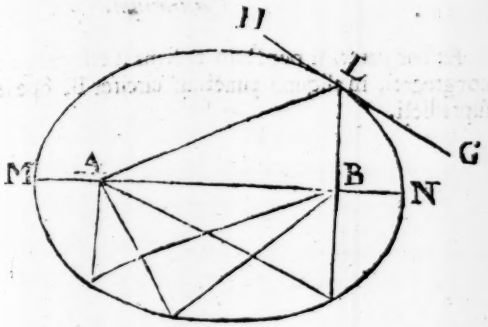
EX hoc quoq; sequitur radios convergentes ad aliquod punctum circiter B, fieri etiam parallelos, ope lentis, vel speculi supradicti.

Prop. 22. Problema.

Radios ab unico puncto dato divergentes, in aliud punctum ejusdem diaphani congregare; datis quoq; lentis vel speculi verticibus: oportet tamen, ut punctum divergentiæ, punctum concursus, & vertices lentis vel speculi, sint in eadem recta linea.

Catoptrice.

SInt radii e puncto A divergentes, in punctum B congregãdi, speculo cujus vertex M. Focis A, B, & vertice M, describa-



tur

tur ſpeculum ellipticum Concavum M L N, in cujus ſuperficiem, incidat radius A L, in puncto L: Dico radium A L in punctо L reflecti, & in focum B tendere. Quoniam enim A L, & axis Sphæroidis ſunt in eodem plano; erit ellipſis L M N (ex qua genita eſt Sphæroïs) ſuperficies reflectionis radii A L, & angulus radii
10. *Hujus.* A L cum contingente, æqualis erit angulo B L cum eadem contingente ellipſem M L N; reflectetur igitur radius A L in B; quod erat oſtendendum.

Dioptrice.

Sint radii e puncto A divergentes, in punctum B congregandi,

15. *Hujus.* lente, cujus vertex incidentiæ M, emerſionis O, radii ex A divergentes, intra lentem paralleli mittantur, ope Conoidis, vel Sphæroidis, cujus vertex M, & intra lentem paralleli, in punctum B congregentur, ope Conoidis, vel Sphæroidis cujus vertex O; quod erat faciendum.

14. *Hujus.*

Corollarium.

Ex hoc patet, ſi punctum radians fuerit prope A, ipſius radios congregari, in aliquod punctum circiter B, ope lentis vel ſpeculi ſupradicti.

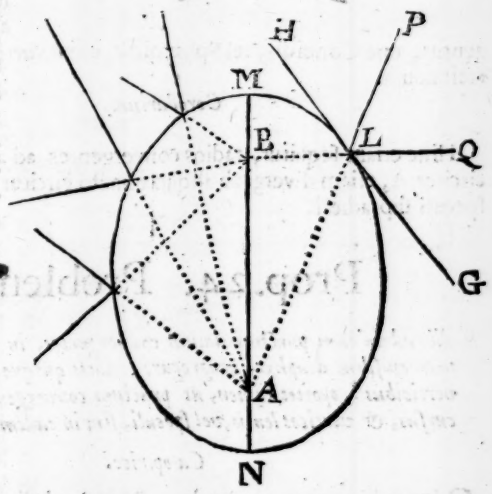
Prop.

Prop. 23. Problema.

Radios ad unicum punctum datum convergentes, in eodem diaphano ab alio puncto dato divergere; datis quoque lentis, vel ſpeculi vertici-bus: Oportet tamen, ut punctum convergentiæ, punctum divergentiæ, & vertices lentis, vel ſpeculi, ſint in eadem recta linea.

Catoptrice.

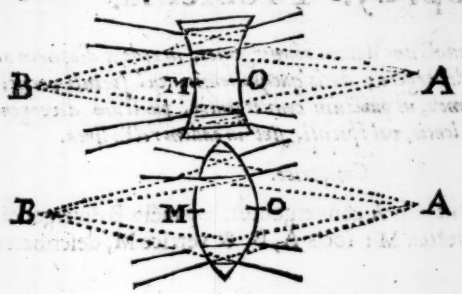
SInt radii ad punctum **A** convergentes, a puncto B divergendi, ſpeculo cujus vertex M: focis **A**, B, & vertice M, deſcribatur ſpeculum ellipticum convexum M L N. Dico omnes Radios ad focum **A** convergentes, & in ſpeculi ſuperficiem incidentes, in ipſa reflecti, & a foco B divergere. Sit enim ad focum **A** convergens radius P L, qui igitur erit in eo plano cum axe ſpeculi, eritque Ellipſis M L N, (ex qua genita eſt Sphærois) ſuperficies Reflectionis radii P L, qui producetur in A; & a B, per L, ducatur B Q, tangatque ellipſim L M N recta H L G in puncto L. Quoniam igitur angulus A L G, eſt æqualis angulo B L H; erit & priori ad verticem P L H, æqualis poſteriori ad verticem Q L G; reflectetur igitur P L in Q: quod oſtendendum erat.



10. *Hujus.*

Dioptrice.

Sint radii ad punctum A convergentes, a puncto B divergendi, lente cujus vertex incidentiæ M, emerſionis O. Radii ad punctum A convergentes, intra lentem paralleli mittantur, ope conoidis vel ſphæroidis, cujus vertex M; & intra lentem paralleli, a puncto B divergentur, ope Conoidis, vel Sphæroidis, cujus vertex O: quod erat faciendum.



17. *Hujus.*

16. *Hujus.*

Corollarium.

Hinc etiam ſequitur, radios convergentes ad aliquod punctum circiter A, etiam divergi ab aliquo puncto circiter B, ope lentis, vel ſpeculi ſupradicti.

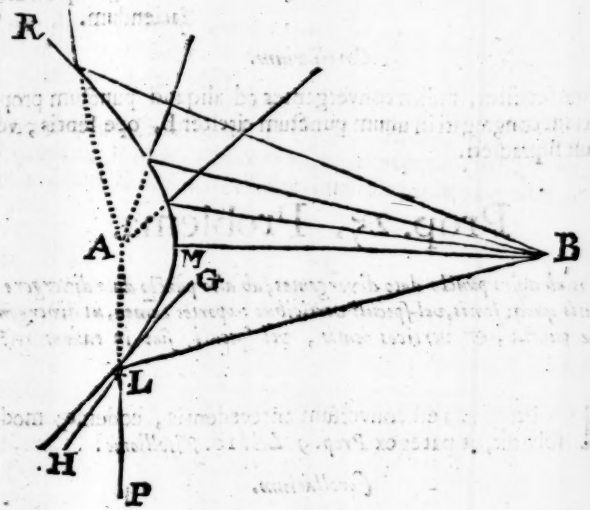
Prop. 24. Problema.

Radios ad unicum punctum datum convergentes, in aliud punctum datum ejuſdem diaphani congregare; datis quoque lentis vel ſpeculi verticibus: oportet tamen, ut punctum convergentiæ, punctum concurſus, & vertices lentis, vel ſpeculi, ſint in eadem recta linea.

Catoptrice.

SInt radii convergentes ad punctum A, ad aliud punctum B congregandi, ſpeculo cujus vertex M. Focis A, & B, & vertice M, deſcribatur ſpeculum Hyperbolicum convexum L M R; ſi modo vertex M, proprior fuerit puncto convergentiæ A: Si vero vertex M, proprior fuerit puncto concurſus B; focis A & B, & vertice M, deſcribatur ſpeculum hyperbolicum concavum. Dico omnes radios

radios ad focum A convergentes, in ſuperficie ſpeculi L M R reflecti, & in focum B, congregari; ſit enim radius P L ad focum A vergens, qui igitur eſt in eodem plano cum axe ſpeculi; hyperbole igitur L M R (ex cujus revolutione genitum eſt ſpeculum) eſt ſuperficies reflectionis radii P L; qui radius producatur in A, & a puncto L ducatur recta L B; tangatque Hyperbolam, recta H L G, in puncto L; angulus igitur A L G, hoc eſt H L P, eſt æqualis angulo G L B; reflectitur igitur P L in B: quod erat oſtendendum. Eodem quoque modo, demonſtratur hæc concluſio, in ſpeculo hyperbolico concavo. 10. *Hujus.*

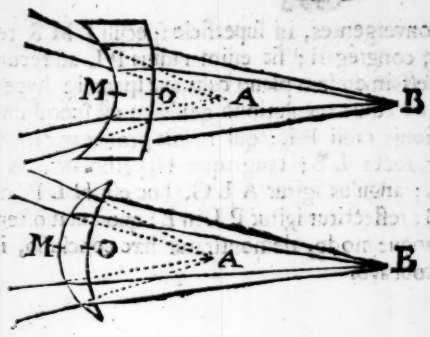


Dioptrice.

Sint radii ad punctum A convergentes, in aliud punctum B

 congre-

17. *Hujus.*



14. *Hujus.*

congregandi, lente cujus vertex incidentiæ M, emerſionis vero O. radii ad A convergentes, intra lentem paralleli mittantur, ope conoidis, vel ſphæroidis, cujus vertex M: & intra lentem paralleli, in punctum B, congregentur, ope conoidis vel ſphæroidis, cujus vertex O: quod erat faciendum.

Corollarium.

Hinc ſequitur, radios convergentes ad aliquod punctum prope A, etiam congregari in unum punctum circiter B, ope lentis, vel ſpeculi ſupradicti.

Prop. 25. Problema.

Radios ab unico puncto dato divergentes, ab alio puncto dato divergere; datis quoq; lentis, vel ſpeculi verticibus: oportet tamen, ut divergentiæ puncta, & vertices lentis, vel ſpeculi, ſint in eadem recta linea.

HOc Problema eſt converſum antecedentis, eodemq; modo ſolvitur, ut patet ex *Prop. 9. Lib. 10. Vitellionis.*

Corollarium.

Ex hoc problemate, etiam manifeſtum eſt; radios divergentes ab uno aliquo puncto, circiter B, etiam divergi ab unico puncto circiter A, ope lentis, vel ſpeculi ſupradicti.

Manifeſtum 1.

Per limitationes, quæ reſolutioni horum Problematum inſerviunt,

unt, Manifestum est in Dioptricis, Conoideon, & Sphæroideon portiunculas, ita in lentibus connexas esse; ut axis lentis sit communis axis utriusq; portiunculæ, & vertices lentis portiunculaꝝ vertices.

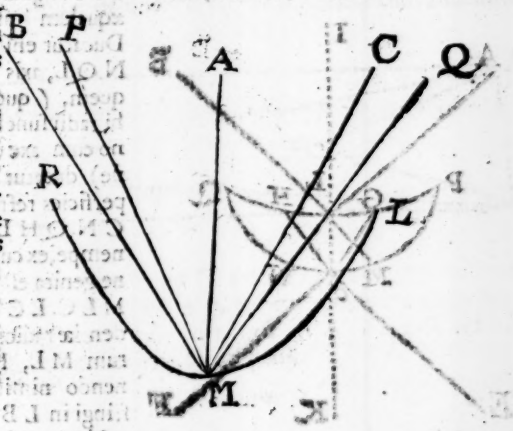
Manifestum 2.

Secundo, Manifestum est in omnibus horum problematum resolutionibus Dioptricis, & Corollariis; radios extra lentem vel parallelos, vel ad unum punctum convergentes, vel ab unico puncto divergentes; intra lentem semper esse parallelos.

Prop. 26. Theorema.

Si duo Radii, in eodem cum axe plano, incidant in speculi verticem, & ab ea reflectantur; erit angulus a radiis incidentibus, æqualis angulo a radiis repercussis.

Sint duo radii B M, C M, in eodem cum axe plano, incidentes, in speculi R M L, verticem M, & reflectentur in Q, & P: Dico angulum B M C, a radiis incidentibus comprehensum, esse æqualem angulo P M Q, a radiis reflexis comprehenso. Sit speculi axis A M, & quoniam B M, C M, sunt in eodem cum axe plano, erit illis una, & eadem superficies reflectionis, figura nempe R M L, ex cujus revolutione genitum, est



10. *Hujus.*

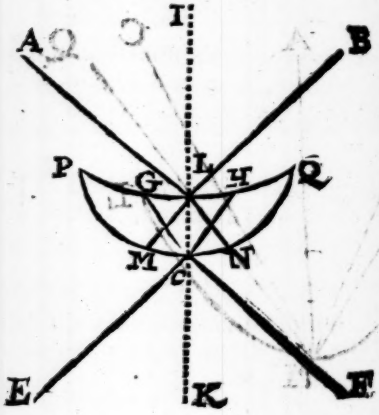
speculum;

ſpeculum; eritq; angulis B M A, æqualis angulo A M Q; & C M A, æqualis angulo A M P; igitur B M A & C M A ſimul, nimirum B M C, æqualis erit angulo A M P, & angulo A M Q ſimul, id eſt angulo P M Q; quod demonſtrare oportuit.

Prop. 27. Theorema.

Si duo radii, in eodem cum axe plano, extra lentem, concurrant in vertice lentis, eam tranſeuntes; duo vero alii, in eodem plano cum prioribus, intra lentem prioribus etiam in tranſitu paralleli, concurrant in altera lentis vertice, ex illa egredientes: angulus comprehenſus a duobus primis ante ingreſſum, æqualis erit angulo comprehenſo a duobus poſtremis poſt egreſſum.

SInt duo radii extra lentem A L, B L, in eodem tamen plano cum illius axe, lentem P M N Q L tranſeuntes, refracti in L N, & L M; ſintq; duo alii, intra lentem prioribus in tranſitu Paralleli, nempe G C ipſi L N, & H C ipſi L M; omnibus hiſce quatuor radiis in uno reflectionis ſuperficie exiſtentibus; incidantq; A L, B L in unam lentis verticem L, egrediantur vero H C, G C, ex alia lentis vertice C, in C F, C E. Dico angulum A L B, eſſe æqualem angulo E C F. Ducatur enim lentis P M N Q L, axis I L C K, per quem, (quoniam omnes hi radii ſunt in eodem plano cum axe ex ſuppoſitione) ducatur communis ſuperficies refractionis, P M C N Q H L G, planum nempe, ex cujus revolutione genita eſt lens; eruntq; M L C, L C H anguli incidentiæ radiorum parallelorum M L, H C, (ſupponendo nimirum M L refringi in L B; nam ſi B L refringatur in L M, & e converſo



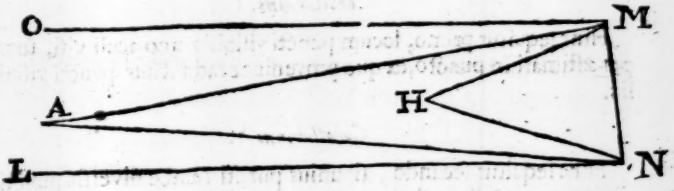
10. *Hujus.*

converſo M L refringetur in L B) æquales: & ideo refractiones quoq; æquales, quæ ab æqualibus incidentiæ angulis M L C, L C H ſubſtractæ, vel iiſdem additæ, efficiunt angulos I L B, E C K æquales. Eodem modo probabitur æqualitas angulorum A L I, K C F; Totus igitur angulus A L B, eſt æqualis toti angulo E C F; quod demonſtrare oportuit.

Prop. 28. Theorema.

Si ambobus oculis ſanis, punctum quodlibet aſſpiciatur; diſtantia illius ab oculis ſingulis, hoc eſt ipſius locus, ſemper æſtimatur, ſecundum contorſionem axium oculorum.

SIt punctum quodlibet viſibile A, oculorum centra M N. Si oculi M, N, nullo vitio laborent, & oculatus cogitabundus hæreat nihil intuens; tunc oculorum axes M O, N L ſemper erunt paralleli, nempe in ſitu ſuo naturali; ſi vero ambo oculi intueantur punctum aliquod A e longinquo, paululum contorquentur axes oculares M O, N L, in M A, N A, (quoniam in oculorum axibus ſolummodo fit viſio diſtinctiſſima, ut experientia ſatis conſtat, ratione vero firmiſſime demonſtratur:) & ſi ambo oculi intueantur



punctum aliquod propinquius H, adhuc magis contorquentur axes oculorum M A, N A in M H & N H: atq; quotidiana experientia, majoris vel minoris contorſinis, natura eſt edocta, ut de diſtantia, ſeu loco viſibilis, conjecturam facere poſſit.

Corollarium.

Hinc ſequitur, locum viſibilis duobus oculis viſi, ſemper eſſe in concurſu axium ocularium.

Prop.

Prop. 29. Theorema.

Si unico oculo, punctum quodlibet Aſſpiciatur; diſtantia puncti ab oculo, ſeu ipſius locus, ſemper æſtimatur, ſecundum applicationem oculi, ad viſionem illius puncti.

OCulus enim ſanus, & bene valens, naturalem ſuum ſitum retinens, ſi puncti e longinquo radios intercipiat parallelos, his radiis collectis fortiſſime pingitur punctum viſibile longinquum in oculi retina. Si vero punctum radians, appropinquet, oculo priſtinum ſitum ſervante, impoſſibile eſt ut diſtincte pingatur radians in oculi retina, ut ad nauſeam demonſtrant Scriptores Optici. Qua de cauſa, naturæ inſitum eſt, ut humores oculi fluidos, & mobiles, aliquo modo diſponat ad radiantia propinqua, ut diſtincte pingantur in oculi retina; ex quorum humorum mutatione, magna vel parva, dignoſcit natura (quotidianis experientiis edocta) num parvo, vel magno Intervallo, diſtet radians ab oculo; atq; ita de illius loco conjecturam facit: eodem modo de Myopibus eſt dicendum, qui oculum habent, ad radiantia propinqua, a natura fabricatum.

Corollarium. 1.

Hinc ſequitur primo, locum puncti viſibilis uno oculi viſi, ſemper æſtimari in puncto, ex quo proveniunt radii illius puncti viſibilis.

Corollarium 2.

Hinc ſequitur ſecundo, ſi unius puncti radii e diverſis punctis divergantur, nullum dari, nec locum, nec viſionem perfectam.

Corollarium 3.

Hinc ſequitur tertio, ſi unius puncti radii in oculum paralleli mittantur, locum illius puncti apparentem, infinite diſtare ab oculo.

Corollarium

Corollarium 4.

Hinc ſequitur quarto, ſi radii unius puncti, ad aliud punctum poſt oculum convergantur, nullum poſſe huic puncto locum aſſignari, niſi (ſi quis voluerit) poſt oculum in radiorum concurſu: Unde imago ex talibus punctis conflata, Commode vocari poteſt, imago poſt oculum.

Prop. 30. Theorema.

Convergentibus unius puncti radiis, ad punctum ſitum poſt oculum, impoſſibile eſt fieri diſtinctam viſionem.

OMnis enim oculus fabricatus eſt, ut aut remota diſtincta videat, quæ radiant quaſi parallelè, aut propinqua, quæ divergentes mittunt radios; radiis autem convergentibus (qui ab arte, & non a natura ortum habent) nullius oculi retina diſtincte pingitur; quoniam chryſtallinus humor hos radios in punctum congregat, in humore vitreo, & diſgregatos ad retinam mittit, ex qua diſgregatione oritur confuſa viſio: ut videri eſt apud Keplerum.

Prop. 31. Theorema.

Si centrum oculi, directe a viſibili recedat, vel ad illud accedat; erit ut tangens ſemianguli viſorii unius ſtationis, ad tangentem ſemianguli viſorii alterius ſtationis; ita reciproce, diſtantia centri ocularis, a centro viſibilis unius ſtationis, ad diſtantiam centri ocularis, a centro viſibilis alterius ſtationis.

SIt viſibile recta A B, quæ biſecetur in C, & a C erigatur ad rectam A B, normalis C E, in qua collocetur centrum oculare primæ ſtationis E; & in eadem linea C E collocetur centrum oculare ſecundæ ſtationis D: Dico igitur ut C D, ad C E, ita reciproce tangens anguli C E B, ad tangentem anguli C D B. Erit enim ut C D, ad C E, ita (poſito C B radio) tangens complem. anguli C D B, ad tangentem complementi anguli C E B;

tangentes autem arcuum ſunt in reciproca proportione tangentium,

complementorum, eorundem arcuum; erit igitur ut C D, ad C E, ita tangens anguli C E B, ad tangentem anguli C D B; quod demonſtrare oportuit.

Prop. 32. Theorema.

Si ſpeculum quodlibet, vel lens, directe a puncto radioſo recedat, vel ad illud accedat; erit ut tangens ſemianguli lentis, vel ſpeculi, e puncto radioſo unius ſtationis, ad tangentem ſemianguli ejuſdem alterius ſtationis; ita reciproce diſtantia puncti a centro lentis unius ſtationis, ad diſtantiam puncti a centro lentis alterius ſtationis.

HOc Theorema demonſtratur eodem modo, quo Antecedens.

Corollarium.

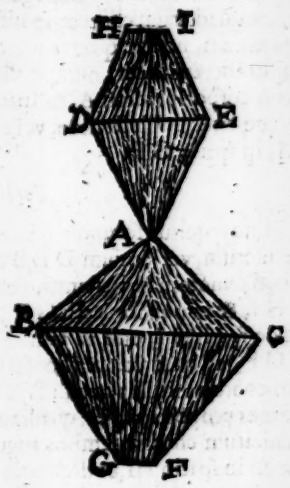
Ex hiſce, ſi oculus, lens vel ſpeculum, directe a radioſo recedat, vel ad illud accedat; erit ut tangens ſemianguli viſorii, unius ſtationis, ad tangentem ſemianguli viſorii, alterius ſtationis; ita tangens ſemianguli radioſi, ejuſdem prioris ſtationis, ad tangentem ſemianguli radioſi, alterius ſtationis.

Prop. 33. Theorema.

Vires Corporum radioſorum, in illuſtrando, vel comburendo (radiis nimirum in ſpatia æqualia abſq; debilitatione congregatis) ſunt in duplicata ratione Chordarum, ſuorum ſemiangulorum radioſorum.

SIt punctum, undiq; & æqualiter in infinitum radians A, ſintq; coni duo radioſi D A E, B A C, quorum radii congregentur in

in ſpatia æqualia G F, & H I, abſq; debilitatione: Dico vim illuſtrationis, vel conflagrationis in G F, ad vim illuſtrationis, vel conflagrationis in H I, eſſe in duplicata ratione chordæ, ſemiſſis anguli BAC, ad chordam ſemiſſis anguli D A E. Quoties enim continetur baſis coni D A E, in baſe coni B A C, toties etiam continetur efficacia radiorum coni D A E, in efficacia radiorum coni B A C; & eodem modo, quæ proportio eſt inter baſes, eadem eſt & inter vires, conis ſcilicet in æqualia ſpatia congregatis; Baſes autem ſunt æquales circulis, quorum radii ſunt chordæ ſemiangulorum radioſorum, ut demonſtrat *Archimedes* Lib. 1. *de ſphæ. & Cylind.* Prop. 40. Baſes igitur ſunt in duplicata ratione earum chordarum; vires ergo, ſive in comburendo, ſive in illuſtrando, ſunt in eadem ratione; quod demonſtrare oportuit. Eodem modo poterit hoc Theorema demonſtrari, etiamſi ſpatia H I, G F ſint mera puncta.



Corollarium 1.

Ex hoc Theoremate ſequitur, ſi corpus radioſum fuerit in A, & ejus radii congregentur in ſpatia æqualia H I, G F, eorum vires in comburendo, vel illuſtrando, eſſe in duplicata ratione prædictarum chordarum: Dividatur enim corpus radioſum A, in ſua puncta radiantia; quoniam itaq; hæ ſunt magnitudines proportionales; nempe quadratum chordæ ſemiſſis anguli D A E; quadratum chordæ ſemiſſis anguli B A C; vis in illuſtrando, vel comburendo unius-cujuſq; puncti corporis radioſi A, in ſpatio H I; & vis in illuſtrando, vel comburendo unius-cujuſq; puncti corporis radioſi A, in ſpatio G F (ſupponimus enim omnium punctorum conos radioſos in

H I congregatos, æquales habere angulos radioſos; idem ſupponimus in conis ad G F congregatis): erit ut una antecedentium, nempe quadratum chordæ ſemiſſis anguli D A E; ad unam conſequentium, nempe quadratum chordæ ſemiſſis anguli B A C; ita omnes antecedentes, nempe vires in illuſtrando vel comburendo totius corporis radioſi A, in ſpatio H I; ad omnes conſequentes, nempe vires in illuſtrando, vel comburendo, totius corporis radioſi A, in ſpatio G F.

Corollarium 2.

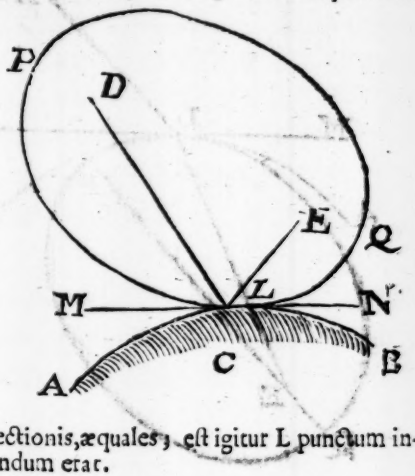
Hinc ſequitur ſecundo (ſi corpus radioſum fuerit in A, & ope ſpeculorum, vel lentium D E, B C, congregentur radii ſingulorum radioſi punctorum, in lentes, vel ſpecula incidentes, in puncta ſpatii H I, & in puncta ſpatii G F) Vim in illuſtrando, vel comburendo ſpatii H I, eſſe ad vim in illuſtrando, vel comburendo ſpatii G F, ut quadratum chordæ ſemiſſis anguli D A E, ad quadratum chordæ ſemiſſis anguli B A C; ſunt enim omnes hæ magnitudines proportionales; quadratum chordæ ſemiſſis anguli D A E, quadratum chordæ ſemiſſis anguli B A C, illuſtratio unius-cujuſq; puncti in ſpatio H I, & illuſtratio unius-cujuſq; puncti in ſpatio G F: Cumq; antecedentes, & conſequentes ſint numero æquales, propter æqualitatem ſpatiorum H I, G F; erit ut una antecedentium, nempe quadratum chordæ ſemiſſis anguli D A E; ad unam conſequentium, nempe quadratum chordæ ſemiſſis anguli B A C; ita omnes antecedentes, nempe tota illuſtratio, vel conflagratio in ſpatio H I; ad omnes conſequentes, nempe totam illuſtrationem, vel conflagrationem, in ſpatio G F.

Prop. 34. Problema.

Data regulari politi ſuperficie, & datis, uno puncto in linea incidentiæ, & altero in linea reflectionis; punctum reflectionis invenire.

SIt data regularis politi ſuperficies A C B; ſintq; data puncta D, E: focis D, E, deſcribatur ſphæroïs P L Q, tangens ſuperficiem A C B in puncto L: Dico L eſſe punctum quæſitum. Per L ducatur planum M L N, utramq; ſuperficiem tangens; & per puncta

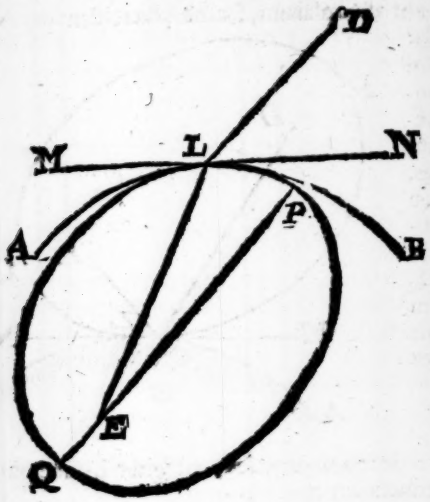
puncta D E L ducatur aliud planum, ſecans ſphæroidem per axem; & communi ſectione faciens ellipſen L P Q, ex qua genita eſt ſphærois, ſecans quoq; planum M L N normaliter, in linea L M N, quæ ellipſen P L Q tangit in puncto L; Sunt igitur ellipſis P L Q, & linea L M N, in Plano reflectionis quæſito; & lineæ ex ellipſeos focis ductæ, faciunt angulos D L M, E L N, nimirum incidentiæ, & reflectionis, æquales; eſt igitur L punctum incidentiæ, quod oſtendendum erat.



Prop. 35. Problema.

Data regulari denſi ſuperficie, & datis, uno puncto in linea incidentiæ, & altero in linea refractionis; punctum refractionis invenire.

SIt regularis denſi ſuperficies A B, ſitq; datum punctum in linea incidentiæ E, & in linea refractionis D: foco remotiore E, deſcribatur ſphærois denſitatis Q L P, tangens ſuperficiem denſi A B in puncto L, ita ut recta D L ſit axi ſphæroidis Q P parallela: Dico L eſſe punctum refractionis quæſitum. Per L ducatur planum M L N utramq; ſuperficiem tangens; perq; puncta D, L, E, ducatur aliud planum, quod tranſibit per axem ſphæroidis, faciens communem ſectionem ellipſem denſitatis, ad Planum M L N rectam,



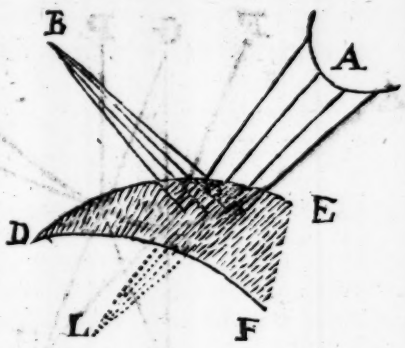
rectam, quæ igitur est superficies refractionis; & ideò radius D L axi Q P parallelus, in eam incidens, refringetur in E; & e contra E L ex puncto L refrangitur in D; Punctum igitur L, est punctum refractionis quæsitum; quod ostendendum erat.

Prop. 36. Problema.

Data regulari, densi, aut politi superficie; & datis, puncto visibili, & oculo; locum imaginis puncti visibilis reflexum, vel refractum (si modo detur distinctus) invenire.

SIt regularis politi superficies E D F, sit oculus A, & punctum visibile B: positis itaq; puncto B in linea incidentiæ, & singulis punctis pupillæ oculi A seorsum in lineis reflectionum; inveniantur puncta reflectionum: & a punctis pupillæ, per sua reflectionum puncta, ducantur omnes lineæ reflectionum, in quarum concursu nempe L, (si modo concurrant) erit locus apparens imaginis

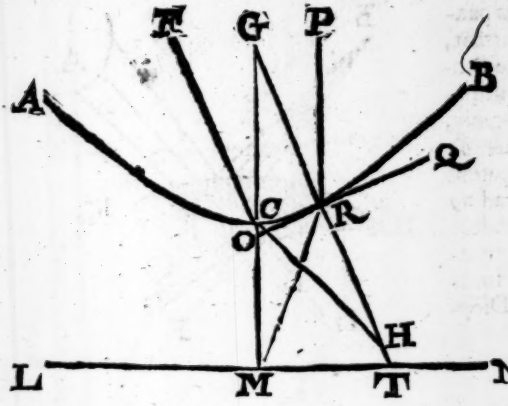
imaginis puncti B. Si vero in uno puncto non concurrant, nullus dabitur, distinctus, & determinatus locus imaginis, puncti visibilis B. Quæ omnia patent ex corollariis ad 29 Prop. hujus: eodem quoque modo, inveniendus est locus imaginis in Dioptricis.



Prop. 37. Theorema.

Si visibile mittat radios parallelos, per Conoidem densitatis; erunt apices penicillorum, singulorum visibilis punctorum, in uno quam proxime plano.

SIt Conois densitatis A C B, cujus axis G C producetur ad focum exteriorem M; & per M ducatur Planum L M N, cui normalis sit G M; dico omnes apices penicillorum, ex radiis in Conoide parallelis, genitorum, cadere quam proxime in planum L M N. Sit enim unus penicilli axis G R H, normaliter cadens in conoidis superficiem in punctο R, & per axem conoidis, & axem penicilli (qui sunt in eodem plano) ducatur planum, faciens cum conoide, communem sectionem hyperbolam A C R B, ex qua generatur; cum plano vero L M N, rectam L M N; & per punctum R, ducatur una linea tangens hyperbolam, nempe Q R O, axi occurrens in O, alia vero P R, axi hyperbolæ parallela, quæ refringetur in focum hyperbolæ exteriorem M, seu apicem penicilli radiorum 14. *Hujus.*



radiorum axi parallelorum; ducaturque ad verticẽ hyperbolæ linea FC, ipſi G H parallela, quæ ideo refringetur in H, apicem penicilli radiorum, ipſi G H parallelorum: & quoniam angulus incidentiæ G R P, eſt æqualis angulo incidentiæ G C F, erit & angulus refractionis R M G, angulo refractionis G H C æqualis: eruntq; triangula G C H, G R M ſimilia, & ut

Cor. 14. Hujus.

G R : G M : : G C : G H;

Et ob ſimilitudinem triangulorum G R O, G M T, ut

G R : G M : : G O : G T;

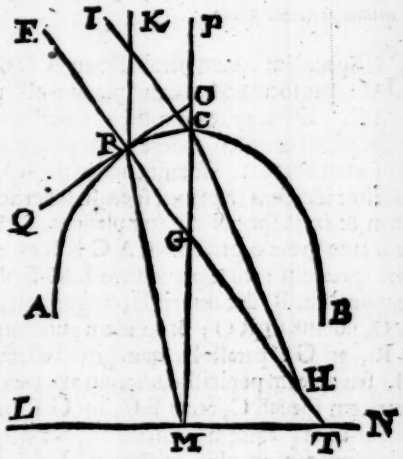
ergo ut G C : G O : : G H : G T; Si vero punctum R non multum recedat a vertice Hyperbolæ C, (de quibus penicillis nos tantum loquimur) G C ferme æqualis erit ipſi G O: (ut ſatis norunt qui in conicis verſati ſunt) ergo & G T, quam proxime æqualis erit ipſi G H; apex igitur penicilli H, quam proxime incidet in ſuperficiem planam L M T N; quod demonſtrare oportuit.

Prop.

Prop. 38. Theorema.

Si visibile mittat radios parallelos, in sphæroidem densitatis; erunt apices penicillorum, singulorum visibilis punctorum, in uno quam proxime plano.

SIt Sphærois densitatis A R C B, cujus axis C G producetur ad focum remotiorem M; & per M ducatur planum L M T N, cui normalis sit axis C G M. Dico omnes apices penicillorum, ex radiis in sphæroidem parallele incidentibus, ortorum, cadere quam proxime in planum L M T N. Sit enim unius penicilli axis F R, normaliter incidens in sphæroidis superficiem in puncto R; & per axem sphæroidis & penicilli, ducatur planum, faciens cum sphæroide communem sectionem ellipsen A R C B, ex qua generatur; cum plano vero L M T N, rectam L M T N; & per punctum R, ducatur una recta Q R O, tangens ellipsem, & axi occurrens in O; alia vero K R, axi ellipseos parallela, quæ igitur refringetur in focum M, seu apicem penicilli radiorum axi parallelorum: ducaturq; per verticem ellipseos C, recta I C, ipsi F R, parallela; quæ ideo refringetur in H, apicem penicilli, Radiorum ipsi F R parallelorum:



14. *Hujus.*

Cor. 14. *Hujus.*

Et quoniam angulus incidentiæ I C P, est æqualis angulo incidentiæ F R K; erit & angulus refractionis R H C, angulo refractionis R M C æqualis; eruntq; triangula G C H, G R M similia; &

ut G R : G M : : G C : G H; & ob ſimilitudinem triangulorum G R O, G M T, erit ut

G R : G M : : G O : G T;

ergo ut G C : G O : : G H : G T; Si vero punctum R non recedat multum a vertice ellipſeos C, (de quibus penicillis nos tantum loquimur) G C ferme æqualis erit ipſi G H; apex igitur penicilli H, quam proxime incidit in ſuperficiem planum L M T N: quod demonſtrandum erat.

Prop. 39. Theorema.

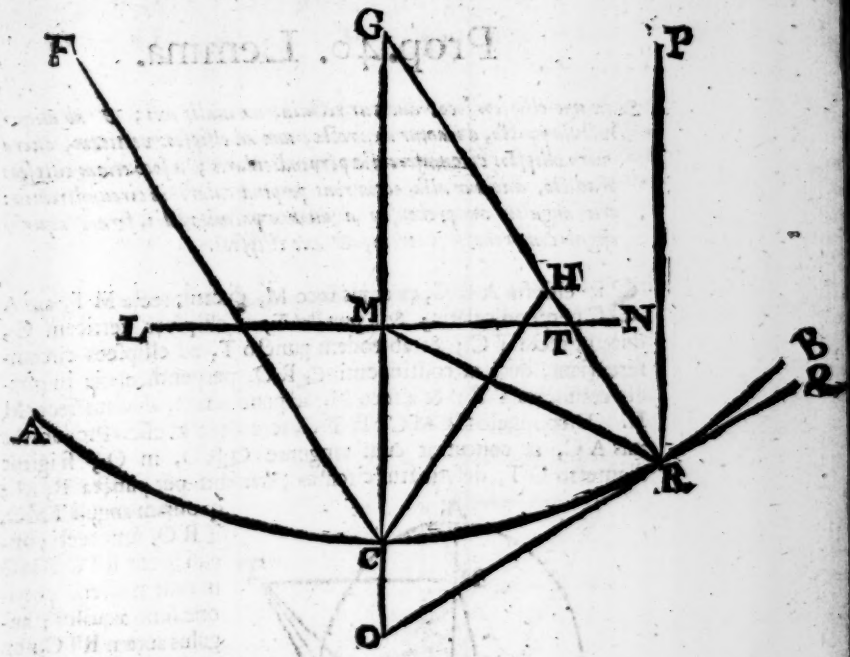
Si viſibile mittat radios parallelos, in ſpeculum cavum parabolicum; erunt apices penicillorum, ſingulorum viſibilis punctorum, in uno quam proxime plano.

SIt Speculum cavum parabolicum A C B, cujus axis G C, focus M: per focum M ducatur planum cui perpendicularis ſit axis G M C. Dico apices omnium penicillorum, ex radiis parallele incidentibus ortorum, cadere quam proxime in planum L M T N, per focum ductum. Sit enim unius penicilli axis G R, perpendiculariter incidens in cavam ſpeculi ſuperficiem in puncto R; per quem, & axem ſpeculi ducatur planum, faciens communem ſectionem cum ſpeculo, parabolam A C R B, ex cujus revolutione generatur ſpeculum; cum plano vero L M T N, rectam L M T N: & per punctum R, ducatur recta, tangens parabolam, & axi occurrens in O, nempe O R O; & ad idem punctum R, ducatur alia recta, P R, axi G C parallela, quæ igitur reflectetur in focum parabolæ M, ſeu apicem penicilli radiorum axi parallelorum; ducaturq; ad verticem ſpeculi C, recta F C, ipſi G R parallela, quæ ideo reflectetur in H, apicem penicilli radiorum, ipſi G R parallelorum; quoniam itaq; angulus incidentiæ F C G, eſt æqualis angulo incidentiæ G R P; erit quoque angulus reflexus G R M, æqualis angulo reflexo G C H. Triangula igitur G C H, G R M ſunt ſimilia.

28. *Hujus.*

Cor. 18. *Hujus.*

Et

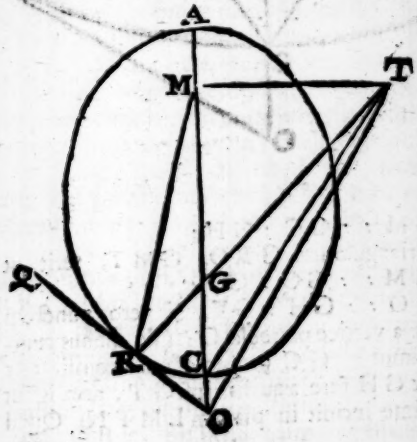


Et ut GR : GM : : GC : GH;
Et ob similitudinem triangulorum GRO, GMT, erit ut
GR : GM : : GO : GT;
ergo ut GC : GO : : GH : GT; Si vero punctum R, non multum recedat a vertice parabolæ C; (de quibus penicillis nos tantum loquimur) GC propemodum æqualis erit rectæ GO; erit ergo & GH fere æqualis ipsi GT, apex igitur penicilli H, quam proxime incidit in planum L M T N; Quod demonstrandum erat.

Prop. 40. Lemma.

Si ex uno ellipſeos foco, ducatur rectula, normalis axi; & ab aliquo rectulæ puncto, ducantur duæ rectæ, una ad ellipſeos verticem, altera vero ellipſeos circumferentia perpendicularis; a foco etiam ellipſeos prædicto, ducatur alia, occurrens perpendiculari, in circumferentia: erit angulus comprehenſus a duabus primis rectis, ferme æqualis angulo comprehenſo, a tertia, & axe ellipſeos.

SIt ellipſis A R C, ex cujus foco M, ducatur recta M T, axi A C perpendicularis; & a puncto T, ad ellipſeos verticem C, ducatur recta T C; & ab eodem puncto T, ad ellipſeos circumferentiam, ducatur contingenti Q R O, perpendicularis in puncto contactus T R; & a foco M, ad punctum R, ducatur recta M R. Dico angulos R M C, R T C, fere æquales eſſe. Producatur axis A C, ut concurrat cum tangente Q R O, in O; ſi igitur diametro O T, deſcribatur circulus, tranſibit per puncta R, M; quoniam anguli T M O, T R O, ſunt recti; anguli igitur R T O, R M O in eadem circuli portione ſunt æquales; angulus autem R T C, non multum differt ab angulo R T O, quoniam ſi R punctum, cadat prope C, (quod ſemper evenit propter brevitatem lineæ M T,) linea contactus R O, concurret cum axe, fere in C. Et pro parvitate rectæ O C, diminuitur angulus C T O, differentia inter angulos R M C, & R T C: quare ſi recta M T fuerit brevis; erunt anguli R T C, R M C ferme æquales; quod demonſtrandum erat.

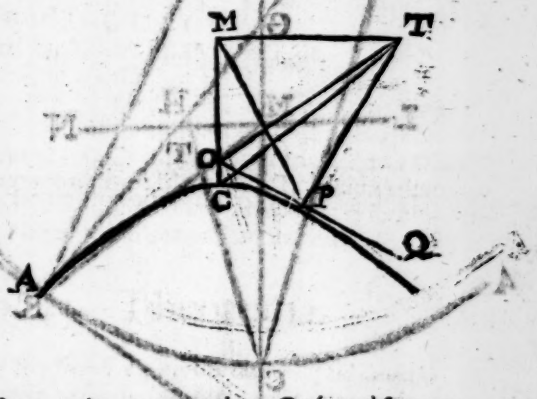


Prop.

Prop. 41. Lemma.

Si ex uno hyperbolæ foco, ducatur rectula, axi perpendicularis; & ab aliquo rectulæ puncto ducantur duæ rectæ, una ad hyperbolæ verticem, altera illius circumferentiæ perpendicularis; & a foco hyperbolæ prædicto, ducatur alia recta, occurrens perpendiculari in circumferentia: erit angulus comprehensus a duabus primis rectis, ferme æqualis angulo comprehenso, a tertia, & axe hyperbolæ.

SIt hyperbola A C R, ex cujus foco M, ducatur recta M T, axi M C perpendicularis; & a puncto T, ad hyperbolæ verticem C, ducatur una recta T C; & ab eodem puncto T, ducatur altera ad punctum contactus R, tangenti O R Q perpendicularis, T R; & a foco M, ad punctum R, ducatur M R. Dico angulos C M R, C T R fere æquales esse. Producatur tangens Q R O, ut concurrat cum axe in O; & diametro T O, ducatur circulus, qui transibit per puncta R, & M, quoniam anguli T M O, T R O, sunt recti: eruntque anguli O M R, O T R, in eadem circuli portione, inter se æquales; angulus autem R T C, non differt multum, ab angulo R T O; quoniam si R punctum, cadat prope verticem C; (quod semper evenit propter brevitatem lineæ M T) tangens Q R O, concurret cum axe, ferme in vertice C: & pro brevitate rectæ O C, diminuitur angulus O T C, differentia inter angulos R M C, R T C: Quare si M T fuerit breviuscula; erunt anguli R T C, R M C, fere æquales; quod demonstrandum erat.

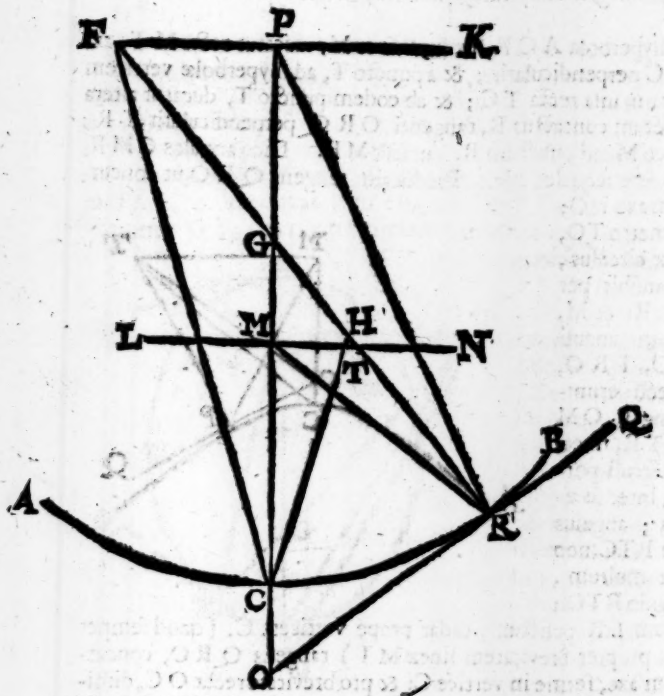


Prop.

Prop. 42. Theorema.

Si superficies plana, in foco Speculi cavi elliptici (cui normalis sit axis Speculi) mittat radios in speculum: erunt apices penicillorum, singularum superficiei punctorum, in uno quam proxime plano.

Sit speculum ellipticum concavum, A C B, cujus axis P C, foci P, M; sitq; in foco P, superficies plana radians, F P K,



cui

cui perpendicularis ſit axis PC: per alterum focum M, ducatur aliud planum priori parallelum, L M T N. Dico apices penicillorum, ſingulorum ſuperficiei radiantis punctorum, cadere quam proxime in planum L M T N. Sit enim unius penicilli axis F R, perpendiculariter incidens in ſpeculum, in puncto R; per quem, & axem ſpeculi, ducatur planum, faciens communem ſectionem cum ſpeculo, ellipſem A C R B, ex qua generatur ſpeculum; cum planis vero, rectas lineas F P K, L M T N; & per punctum R, ducatur recta Q R O, tangens ellipſem, & occurrens axi in O; & ad idem punctum R, ducatur a foco P, recta P R, quæ ideo reflectetur in alterum focum M, ſeu apicem penicilli radiorum, ex foco P divergentium; ducaturq; ad verticem ſpeculi, ex puncto F, recta F C, quæ reflectetur in H, apicem penicilli, radiorum ex puncto F divergentium. Sint itaque anguli C F R, C P R, æquales; (parum enim differunt ut demonſtravimus) eruntq; igitur anguli incidentiæ P R F, P C F æquales: & ideo anguli reflexi G R M, G C H, æquales erunt; quare triangula G R M, G C H ſunt ſimilia. Et ut

22. *Hujus.*

Cor. 22. *Hujus.*

G R : G M : : G C : G H;

& ob ſimilitudinem triangulorum G R O, G M T, ut

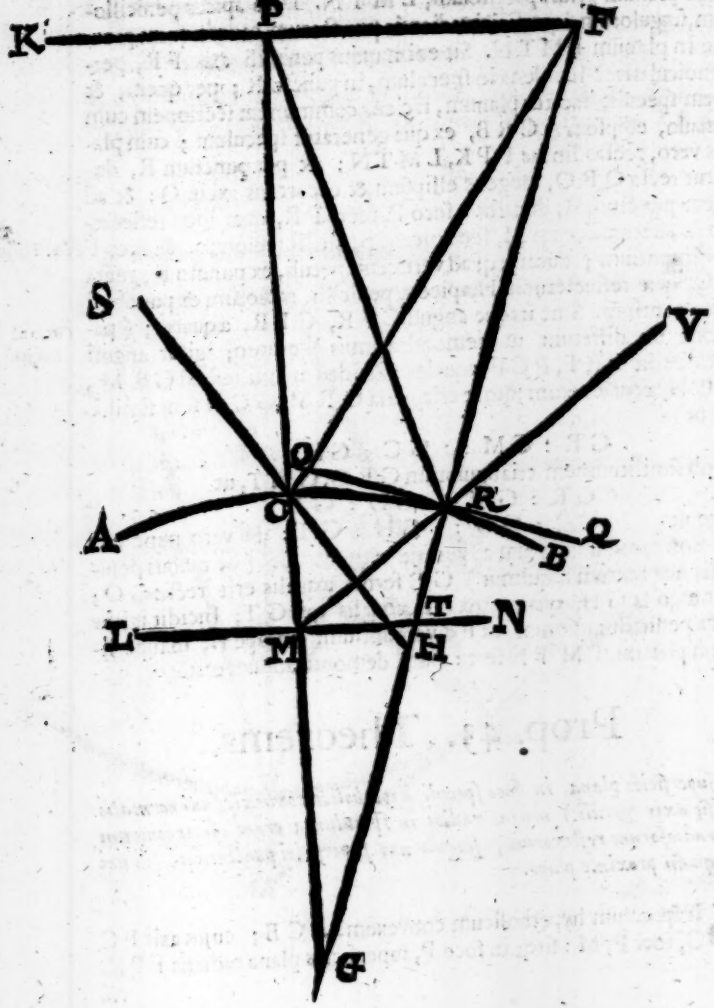
G R : G M : : G O : G T;

ergo ut G C : G O : : G H : G T; Si vero punctum R, non recedat multum a vertice ellipſeos C; (de quibus penicillis nos tantum loquimur) G C ferme æqualis erit rectæ G O; erit ergo & G H, quam proxime æqualis ipſi G T; Incidit igitur apex penicilli radiorum, ex F divergentium, nempe H, in ſuperficiem planam, L M T N fere: quod demonſtrandum erat.

Prop. 43. Theorema.

Si ſuperficies plana, in foco ſpeculi hyperbolici convexi (cui normalis ſit axis ſpeculi) mittat radios in ſpeculum; erunt apices conorum radioſorum reflexorum, ſingulorum ſuperficiei punctorum, in uno quam proxime plano.

SIt ſpeculum hyperbolicum convexum, A C B; cujus axis P C G, foci P, M: ſitq; in foco P, ſuperficies plana radians F P K, cui


K
P
F
S
V
Q
O
R
A
C
B
T
L
N
M
H
G

cui perpendicularis sit axis P C; per alterum focum M, ducatur aliud planum, priori parallelum L M T N. Dico apices conorum radiosorum reflexorum, singulorum superficiei radiantis punctorum, non procul abesse a superficie plana, L M T N. Sit enim unius Coni radiosi axis F R perpendiculariter incidens in speculi superficiem in puncto R, per quem, & axem speculi, ducatur planum faciens communem sectionem cum speculo, hyperbolam A C R B, ex qua generatur, cum planis vero rectis K P F, L M N; & per punctum R, ducatur recta Q R O, tangens Hyperbolam, & axi occurrens in O; ducaturq; a foco P, ad idem punctum R, recta P R, quæ ideo reflectetur a foco M, seu apice coni radiorum puncti P reflexorum: ducatur deinde ad verticem speculi ex puncto F, recta F C, quæ reflectetur ab H, apice coni radiorum reflexorum puncti F. Sint itaq; anguli C F R, C P R æquales; (qui parum admodum differunt ut demonstravimus) eruntq; igitur anguli incidentiæ P R F, P C F æquales; & ideo anguli reflexi F R V, P C S, seu illis ad verticem M R G, H C G, æquales erunt: quare triangula G R M, G C H, sunt similia; & ut

G R : G M : : G C : G H;

Et ob similitudinem triangulorum G R O, G M T, ut

G R : G M : : G O : G T;

ergo ut G C : G O : : G H : G T; Si vero punctum R non recedat multum a vertice Hyperbolæ, (de quibus conis radiosis nos tantum loquimur) recta G C, ferme æqualis erit rectæ G O; erit ergo & G H, quam proxime æqualis rectæ G T; apex ergo coni radiorum reflexorum puncti F, nempe H, non procul distat a plano L M T N; quod demonstrandum erat. 24. *Hujus.* *Cor.* 24. *Hujus.*

Scholium.

In Corollariis ad problemata nostra catoptrica, & dioptrica, diximus eadem problemata, (quæ geometrice tantum resolvuntur per focos sectionum conicarum) quo ad sensum etiam resolvi, per alia quædam puncta, a focis paululum distantia. Ex his autem Theorematibus, nuper demonstratis, patet omnia illa puncta esse in uno quam proxime plano, cui perpendicularis est axis lentis, vel speculi.

Prop. 44. Theorema.

Si cujuſcunque viſibilis, ſingulorum punctorum radii, ad parallelíſmum reducantur: oculo radios parallelos recipienti, ſemper videbitur viſibilis imago, eodem angulo viſorio, quo videtur viſibile ex vertice incidentiæ lentis, vel ſpeculi. Apparetq; imago infinite diſtans, & presbytis diſtincta.

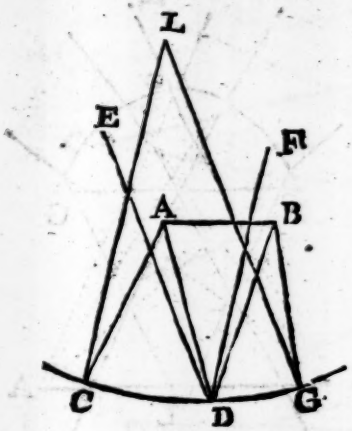
SIt viſibile quodlibet A B, ſive materia radians, ſive imago ante, ſive poſt oculum; dummodo ſit planum, cujus extrema puncta A, & B: Reducantur ſingulorum punctorum radii, ad parallelíſmum, lente vel ſpeculo C D G, cujus axis ſit in plano cum punctis A, B, plano viſibilis perpendicularis: & ab extremis punctis A, B, ad verticem incidentiæ D, ducantur radii A D, B D; & ad verticem emerſionis D, radii refracti A D, B D; qui reflectentur vel refrangentur in D F, D E. Dico oculum, radios viſibilis A B parallelos, intercipientem, ſemper comprehendere illius imaginem, per angulum viſorium, æqualem angulo A D B. Sit enim centrum oculi L, in eodem plano cum axe lentis, vel ſpeculi, & punctis extremis A B; ad quod ducatur radius puncti B, nempe G L, ipſi D E parallelus; item radius puncti A, nempe C L, ipſi D F parallelos; igitur quatuor iſtæ rectæ, nimirum C L, D F, G L, D E, elliciunt parallelogrammum, cujus anguli oppoſiti, E D F, C L G, ſunt æquales: Eſt autem angulus E D F, æqualis angulo A D B; ergo & angulus C L G, eſt æqualis angulo A D B, ſed oculus in L, apprehendit imaginem viſibilis A B, per angulum viſorium C L G; quoniam puncta extrema A B, emittunt radios, facientes in centro oculi L, angulum C L G, qui igitur æqualis eſt angulo A D B, nimirum eodem angulo, quo videtur viſibile, ex vertice incidentiæ lentis, vel ſpeculi. Quod demonſtrandum erat. Apparet autem infinite diſtans, & presbytis diſtincta, quoniam unumquodque punctum radiat parallele.

26 & 27 *Hujus.*

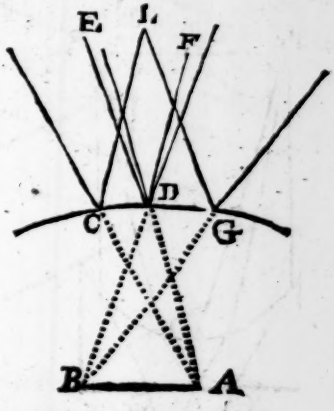
Cor. 3. 29 *Hujus.*

In

visibile ante oculum

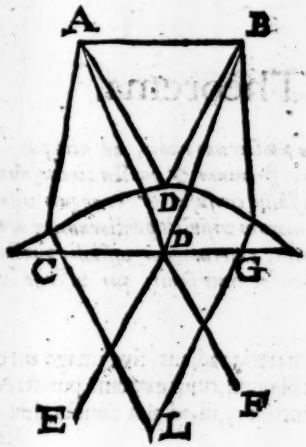


visibile post oculum

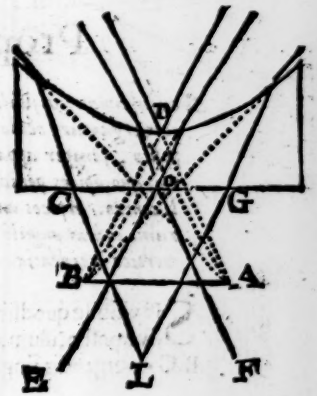


In Dioptricis intermediante diaphano densiore

visibile ante oculum

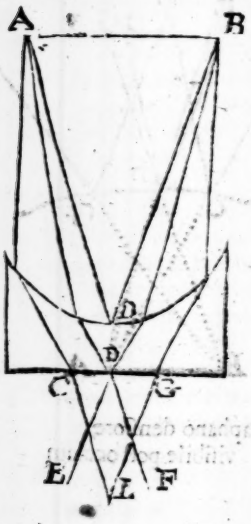


visibile post oculum

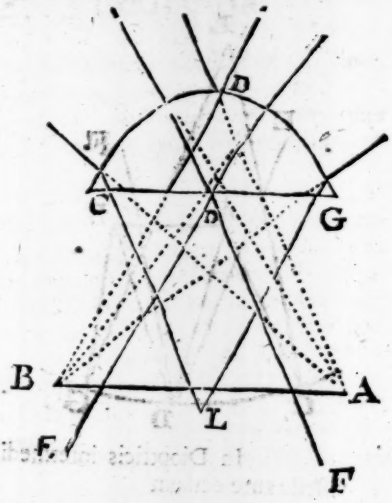


In *Dioptricis* intermediante diaphano rariore

visibile ante oculum



visibile post oculum



Prop. 45. Theorema.

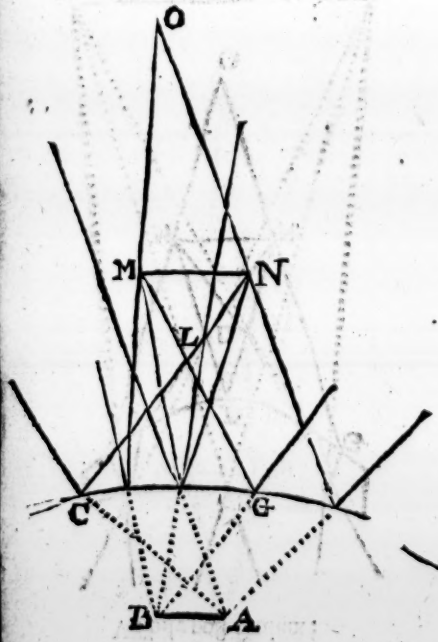
Si cujuscunque visibilis, singulorum punctorum radii, ad alia puncta convergantur; oculo inter lentem, vel speculum, & puncta concursuum posito, semper apparebit imago visibilis confusa, & eo angulo visorio, quo apices penicillorum, extremorum visibilis punctorum, ex oculi centro. Apices autem penicillorum, extremorum visibilis punctorum, eodem angulo apparent ex vertice emersionis, quo visibile ex vertice incidentiæ.

SIt visibile quodlibet A B, sive materia radians, sive imago ante, sive post oculum, dummodo sit planum, cujus extrema puncta A, B. Convergantur singulorum punctorum radii, ad alia puncta, lente

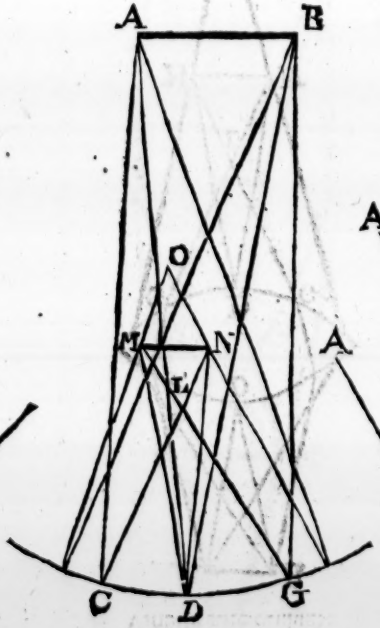
vel

In Catoptricis

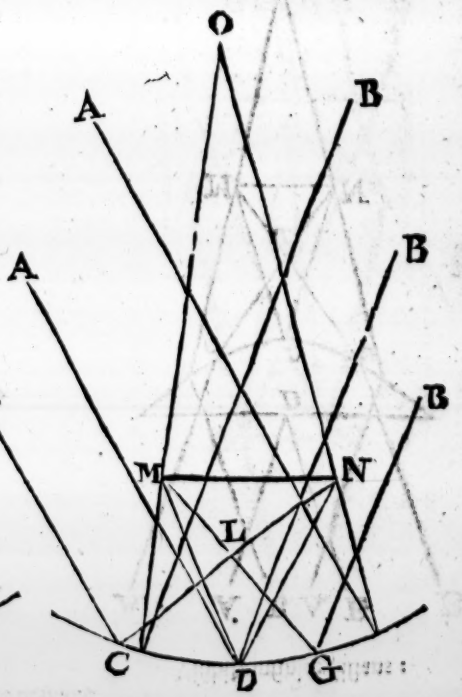
Visibile post oculum :



Visibile ante oculum :

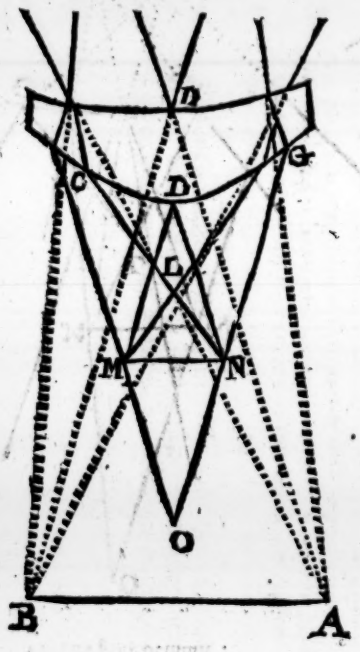


Visibile infinite distans :

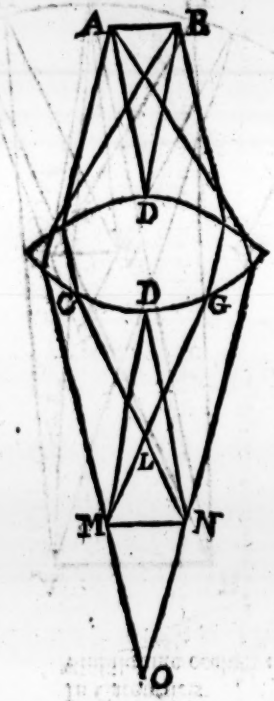


In Dioptricis intermediante diaphano denſiore

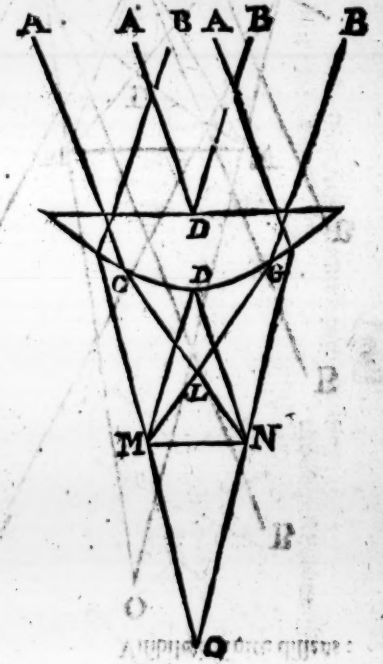
Viſibile poſt oculum:



Viſibile ante oculum:

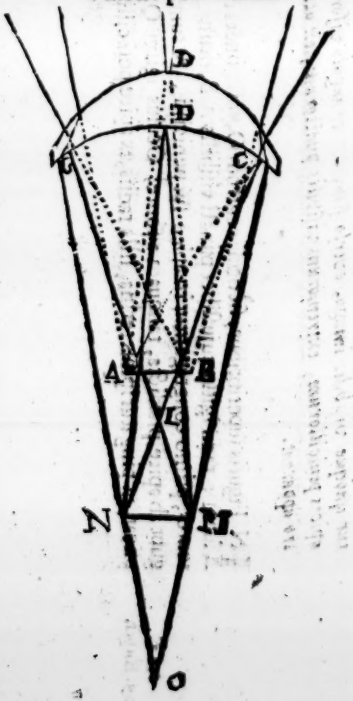


Viſibile infinite diſtans:



In Dioptricis intermediante diaphano rariore

Visibile post oculum :



Visibile ante oculum :

Visibile infinite distans :

vel ſpeculo C D G, cujus axis ſit in plano cum punctis A B, plano viſibilis perpendicularis. Sintq; punctorum extremorum A, B, penicillorum apices M, N; Sitq; centrum oculi L, per quod ad apices penicillorum M, N, ducantur radii, C L N, G L M. Dico oculo in L, imaginem viſibilis A B apparere, cum angulo viſorio M L N, ſeu C L G. Quoniam enim radius C N, tendit ad N, provenit ab extremo viſibilis puncto A; & ob eandem rationem G M provenit ab extremo viſibilis puncto B; angulus igitur C L G, comprehenſus a radiis, extremorum viſibilis punctorum, ſe invicem in centro oculi ſecantibus, eſt angulus viſorius, quo apparet imago viſibilis A B. Apparet autem confuſa, quoniam ſingulorum punctorum radii, ad alia puncta poſt oculum converguntur; in quibus etiam punctis, eſt apparens imaginis locus, ſi modo ullus detur: eſtq; A D B, angulus viſorius viſibilis A B, ex vertice incidentiæ D, æqualis M D N, angulo apicum penicillorum, extremorum viſibilis punctorum ex vertice emerſionis D; ut patet per hujus 27 & 26 Prop. Quæ omnia demonſtranda erant.

30. *Hujus.*

Cor. 4. 29. *Hujus.*

Scholium.

Si autem recta M L producta, in lentem vel ſpeculum C D G non incidat, tunc non videbitur imago iſtius puncti, per lentem vel ſpeculum C D G, cujus apex penicilli eſt M.

Prop. 46. Theorema.

Iiſdem poſitis; oculo poſt puncta concurſuum, apparebit imago, cujuſlibet viſibilis puncti, in apice ſui penicilli; myopibus, in determinata ſua diſtantia, diſtincta; Presbytis autem ſemper confuſa. Videbitur quoque viſibilis imago, everſo ſitu, & eo angulo viſorio, quo apices penicillorum, extremorum viſibilis punctorum, ex oculi centro apparent.

IN Figuris ſuperioribus, ſit oculi centrum O, poſt puncta concurſuum; radii igitur cujuſlibet puncti viſibilis A B, oculum O ferentes, primo congregantur in apice ſui penicilli, & tunc divergunt ab apice prædicta, tanquam a fonte; Oculus igitur O, ſe applicat, ut pingatur ipſius retina, iſtis radiis, ex apice penicilli divergentibus,

Cor. 1. 29. *Hujus.*

gentibus, ex qua applicatione exiſtimat videns locum puncti, eſſe in apice ſui penicilli: ſi vero apex penicilli, vel potius coni radioſi, eo intervallo ab oculo myopis diſter, quo ſolet ipſius retina a radiante diſtincte pingi; in hoc inquam caſu myops prædicti puncti imaginem, diſtincte videbit: Presbytis autem, (quoniam eorum retina radiis ſolummodo parallelis diſtincte pingitur) hiſce radiis divergentibus nulla fit diſtincta viſio; Quæ omnia, ſatis patent, per *Prop.* 29. hujus & ejus conſectaria. Dico imaginem quoque viſibilis A B, apparere everſo ſitu; hoc eſt imaginem puncti A, apparere ad partes B, & e contra imaginem puncti B, ad partes A. A enim apparet in N, apice ſui penicilli, quæ apparet ad partes B, oculo nimirum in O poſito; ut facile deducitur ex 26 & 27 *Prop.* hujus; eodemq; modo imago puncti B apparet ad partes A: Quoniam autem extrema viſibilis puncta apparent ſemper in M, N; apparebit imago viſibilis, angulo viſorio N O M, hoc eſt angulo, quo apices penicillorum, extremorum viſibilis punctorum, ex oculi centro apparent. Quæ omnia demonſtrare oportuit.

Scholium.

Si autem recta O M producta, in lentem vel ſpeculum C D G non incidat; tunc non videbitur imago iſtius puncti, cujus apex penicilli eſt M, per lentem vel ſpeculum C D G: Quod in ſequente etiam intelligendum.

Prop. 47. Theorema.

Si cujuscunq; visibilis, singulorum punctorum radii, ab aliis punctis divergantur; oculo hos radios recipienti, apparebit imago cujuslibet visibilis puncti in apice sui coni radiosi, myopibus, in determinatis suis distantiis distincta. presbytis autem semper confusa. Et imago visibilis, apparebit eo angulo visorio, quo apices conorum radiosorum, extremorum visibilis punctorum, ex centro oculi apparent: apices autem conorum radiosorum, extremorum visibilis punctorum, eodem apparent angulo ex vertice emersionis, quo visibile ex vertice incidentiæ.

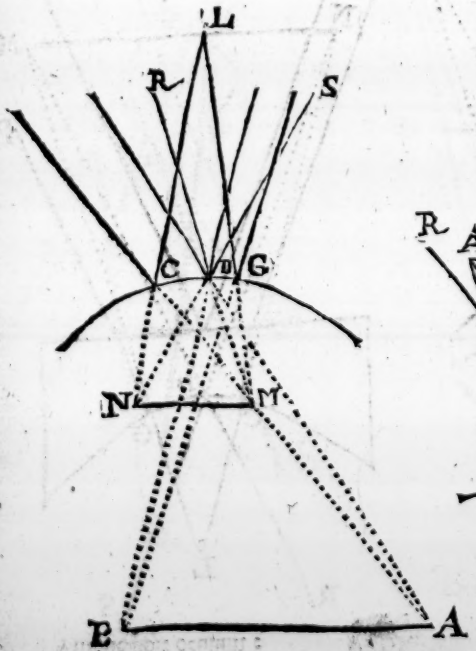
SIt visibile quodlibet A B; sive materia radians, sive imago ante, sive post oculum, dummodo sit planum; cujus extrema puncta A, B. Divergantur singulorum punctorum radii, ab aliis punctis, lente vel speculo C D G, cujus axis sit in plano, cum punctis A, B, plano visibilis perpendicularis: Oculus igitur, hos radios recipiens, ex sua applicatione ad apices conorum radiosorum, singulorum visibilis punctorum, existimat se videre, puncta visibilis A B, in prædictis conorum radiosorum apicibus. Quoniam itaque singulorum punctorum radii, a punctis propinquis divergantur, apparebit imago visibilis, myopibus, in determinatis suis distantiis distincta; Presbytis vero semper confusa. Sint M N apices conorum radiosorum, extremorum visibilis punctorum; sitq; centrum oculi L, in quod concurrunt duo extremorum visibilis punctorum radii C L, G L, a punctis N, M, divergentes, eritq; N L M, seu C L G, angulus visorius, quo videtur imago visibilis ab oculo, cujus centrum L; angulus nimirum, quo apices conorum radiosorum, extremorum visibilis punctorum, ex centro oculi apparent. Estq; angulus A D B, angulus nimirum quo visibile apparet ex vertice incidentiæ, æqualis angulo N D M, seu R D S, angulo nempe, quo apices conorum radiosorum, extremorum visibilis punctorum, ex vertice emersionis apparent; ut patet per *Prop.* 27, & 26 hujus; quæ omnia demonstranda erant.

Cor. 1; 29 *Hujus.*

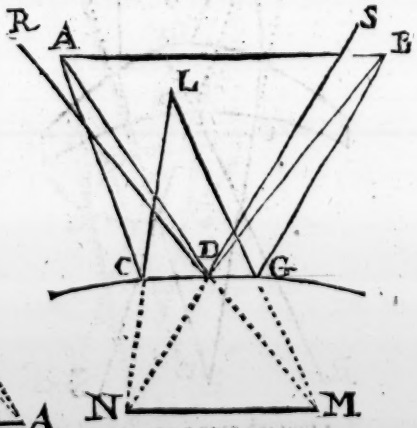
Corollarium.

In Catoptricis

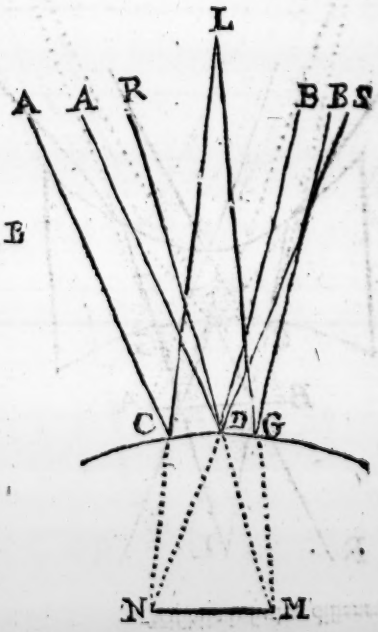
Visibile post oculum :



Visibile ante oculum :



Visibile infinite distans :



In Diopricis intermediante diaphano densiore

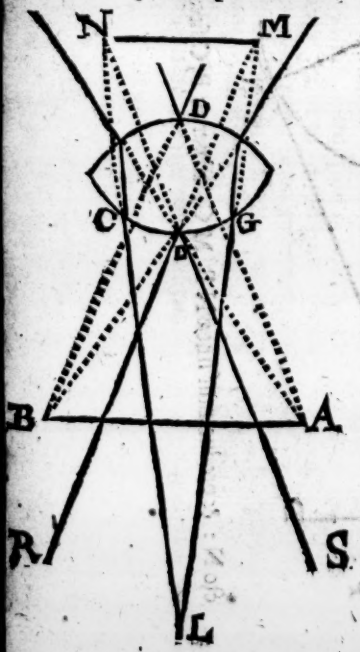
Visibile post oculum ;

Visibile ante oculum ;

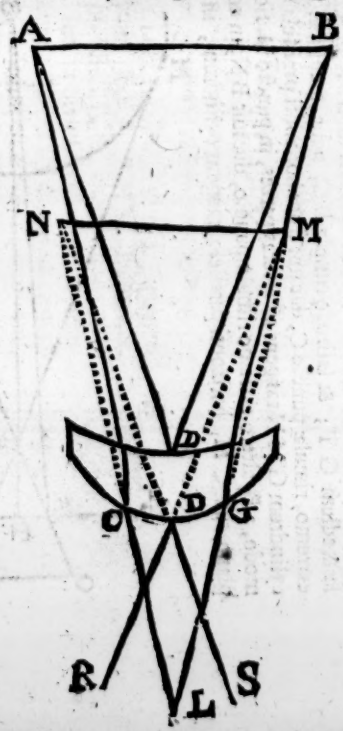
Visibile infinite distans;

In Dioptricis intermediante diaphano rariore

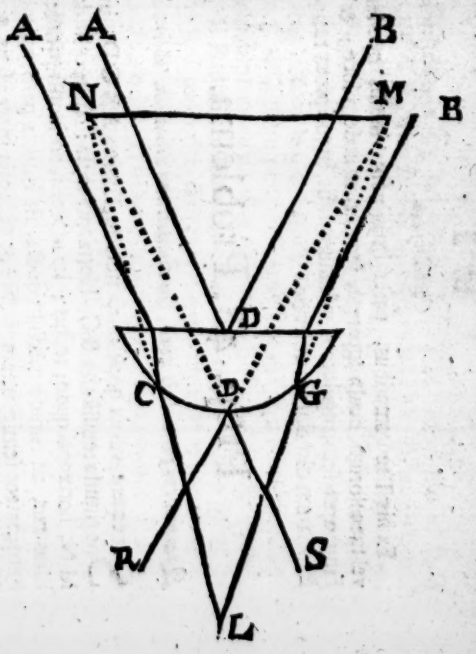
Visibile post oculum:



Visibile ante oculum:



Visibile infinite distans:



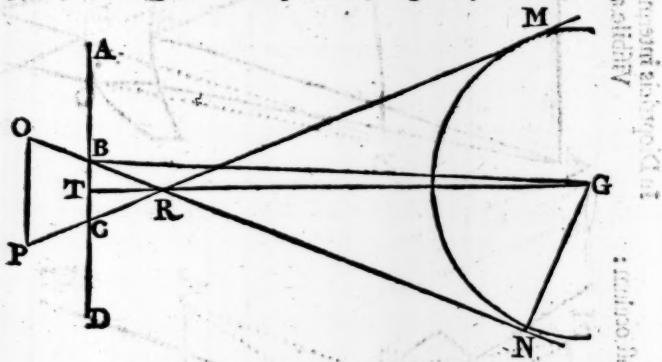
Corollarium

31. *Hujus.* Ex his Theorematibus, patet imaginem visibilis ope lentium vel speculorum, oculo apparere, semper in eodem loco; & igitur tangentes semiangulorum visualium sunt in reciproca ratione distantiarum directarum ab oculo.

Prop. 48. Problema.

Quantitatem foraminis uveæ, seu diametrum visualem, observare.

SIt ex ære, vel ex quovis alio metallo, lamina A B C D; in qua sit rimula tenuissima B C, Horizonti recta: sitq; cylindrus G M N, horizonti quoq; rectus; ita ut linea, horizonti parallela, ab illius axe, ad rimulæ medium ducta, sit laminæ perpendicularis; sintq; baseos semidiameter G N; & distantia inter axem, & rimulæ medium G T; & latitudo rimulæ B C, notæ mensuræ. Et ab extremo, rimulæ puncto C, ducatur linea horizonti parallela C M, cylindrum G M N tangens ad alteras partes, in puncto M. Eodem modo, a B, altero extremo rimulæ puncto, ducatur B N, in eodem plano, cum C M, horizonti parallelo, tangens cylindrum, in pun-



cto N: & producantur lineæ N B, M C, ad partes B, C; sitq; earum

rum interſectio in R; & in triangulo G T B, rectangulo ad T, e datis, G T, T B, datur & B G, & angulus B G M: Et rurſus in triangulo G B N, rectangulo ad N, e datis, B G, G N, dabitur angulus B G N, a quo, angulus B G T ablatus, relinquit angulum R G N. Et in triangulo R G N, e datis omnibus angulis, & latere G N; datur latus G R: dantur igitur in triangulo iſoſceli B R C, angulus B R C, & perpendicularis R T. Sit diameter viſualis O P, in eodem plano cum rectis N R B, M R C, nihil videns per rimulam C B, ultra extremitates cylindri G M N: Lineæ igitur N R B, M R C productæ, diametrum viſualem O P exacte comprehendunt: & in triangulo iſoſceli O R P, (oportet enim ut axis oculi, laminæ A B C D ſit perpendicularis) datis angulo O R P, & perpendiculari a vertice R in baſem O P, ſeu diſtantia oculi a puncto R; dabitur & baſis O P, diameter viſualis quæſita; quam obſervare oportuit.

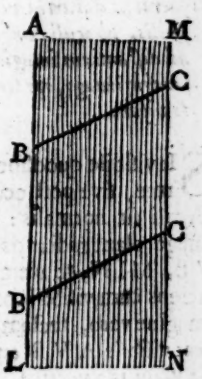
Scholium.

Foramen autem uveæ, non eſt ſemper ejuſdem quantitatis; ſed in forti luce diminuitur, in debili autem ampliatur.

Prop. 49. Theorema.

Radii paralleli, non debilitati; in omni diſtantia, æqualiter illuſtrant idem objectum, eodem modo poſitum.

SInt radii paralleli A M N L; quorum extremi ſunt A L, M N, illuſtrantes, idem objectum B, C, eodem modo poſitum, ſed in diverſis diſtantiis, a radiorum fonte. Dico B C, æqualiter ſemper illuſtrari. Quoniam enim extremi radii, e quibus ſunt A L, M N, extremitates ſuperficiei, objecti B C illuſtrantes, inter ſe æquidiſtant, idem igitur objectum, eodem modo poſitum, ſemper intercipiunt; omnes igitur radii, inter extremos; objectum B C, intercipientes, in objectum B C ſemper incidunt: iidem igitur radii eandem dant illuſtrationem; ſola enim diſtantia, radiorum vim non debilitat.



Corollarium 1.

Corollarium. 1.

Hinc ſequitur, foramen uveæ ocularis ſemper æqualiter illuſtrari, a ſingulis radiantis punctis; ſive fuerit in vertice incidentiæ, ſive emerſionis; (in omni enim lente, ejuſdem puncti radii ſunt paralleli, ut ad manifeſtum ſecundum *Prop.* 25 hujus diximus) dempta ſolummodo particula iſta illuſtrationis, quæ exhauritur opacitate lentis; quæ exceptio in Dioptricis ſemper eſt adhibenda.

Corollarium 2.

Ex hoc Theoremate, & præmiſſo Corollario ſequitur, (ſi cujuſcunque viſibilis, ſingulorum punctorum radii, ad paralleliſmum reducantur) oculum hos radios recipientem, non ſolum comprehendere viſibile, eo angulo viſorio, quo comprehenditur ex vertice incidentiæ, (ut demonſtravimus ad 44 *Prop.* hujus) ſed etiam eadem illuſtratione.

Prop. 50. Theorema.

Si fuerit ut diſtantia viſibilis, a vertice incidentiæ, ad diſtantiam viſibilis, ab oculi centro; ita diſtantia imaginis, a vertice emerſionis, ad diſtantiam imaginis, ab oculi centro: eodem angulo viſorio, apparebit imago, ope lentis, vel ſpeculi; quo apparet viſibile, nudo oculo viſum.

SIt viſibile quodlibet A V B; ſive materia radians, ſive imago ante, ſive poſt oculum, modo ſit planum; cui axis lentis, vel ſpeculi ſit normalis: ope ſpeculi cujuſlibet, vel lentis, appareat imago, plani radiantis A V B, in plano M I N; & per plana A V B, M I N, & axem lentis, vel ſpeculi V I D, ducatur planum, faciens cum viſibili communem ſectionem, rectam A V B; cum imagine vero, rectam M I N. Et a quovis axeos puncto L, appareat viſibile A V B, angulo viſorio A L B; ſitque ut V D, diſtantia viſibilis a vertice incidentiæ; ad V L, diſtantiam viſibilis ab oculi

oculi centro: Ita I D, distantia imaginis a vertice emersionis; ad I O, distantiam imaginis ab oculi centro: Et a puncto axeos O, appareat imago M I N, angulo visorio M O N. Dico angulum M O N; esse æqualem angulo A L B:

Quoniam, ut V D : V L : : I D : I O; erit &
permutando, ut V D : I D : : V L : I O;
ut autem V D : I D : : V A : I N,
Igitur, ut V L : I O : : V A : I N; triangula
igitur A V L, N I O, habentia angulos A V L, N I O, æquales, utpote rectos, & latera circa æquales angulos proportionalia, sunt similia; angulus igitur A L V, æqualis est angulo I O N. Eodem modo, demonstrabitur æqualitas, angulorum V L B, M O I: totus igitur angulus A L B, est æqualis toti angulo M O N. Quod erat demonstrandum.

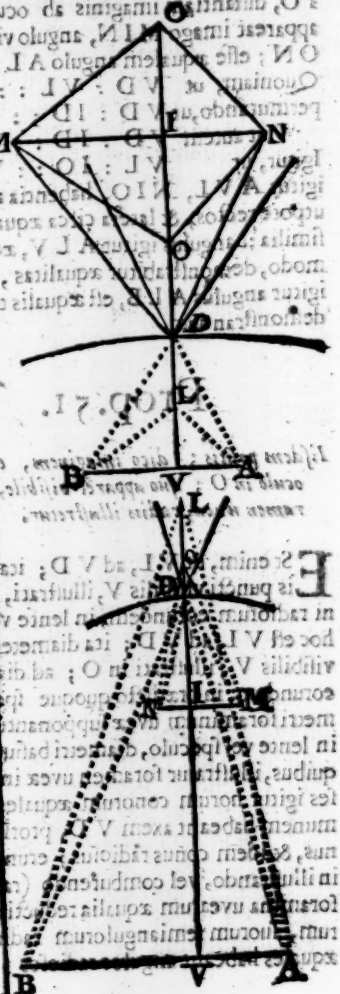
Prop. 51. Theorema.

Iisdem positis; dico imaginem, eodem modo apparere illustratam, oculo in O; quo apparet visibile, oculo in L: dummodo totum foramen uveæ, radiis illustretur.

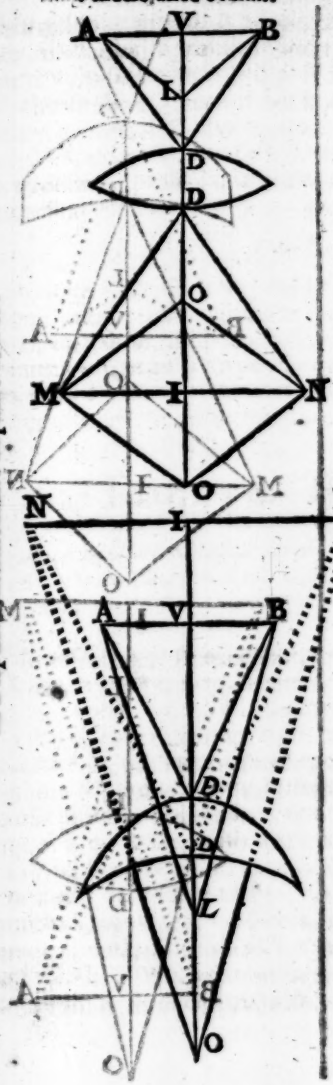
Est enim, ut V L, ad V D; ita diameter foraminis uveæ, radiis puncti visibilis V, illustrati, in L; ad diametrum, baseos coni radiorum eorundem, in lente vel speculo; atq; ut I O, ad I D; hoc est V L, ad V D; ita diameter foraminis uveæ, radiis puncti visibilis V, illustrati in O; ad diametrum baseos coni, radiorum eorundem, in prædicto quoque speculo vel lente: cum igitur diametri foraminum uveæ supponantur æquales; æquales quoq; erunt, in lente vel speculo, diametri basium, conorum, radiorum puncti V; quibus, illustratur foramen uveæ in L, & foramen uveæ in O; Bases igitur horum conorum æquales erunt, cumq; eundem communem habeant axem V D, prorsus æquales erunt; vel potius unus, & idem conus radiosus; eruntq; vires conorum radiosorum, in illustrando, vel comburendo (radiis in spatia æqualia nempe in foramina uvearum æqualia reductis) in duplicata ratione, chordarum, suorum semiangulorum radiosorum: cumque coni radiosi, æquales habeant angulos radiosos; erunt & chordæ semissium horum 33. *Hujus.*

Visibile ante oculum

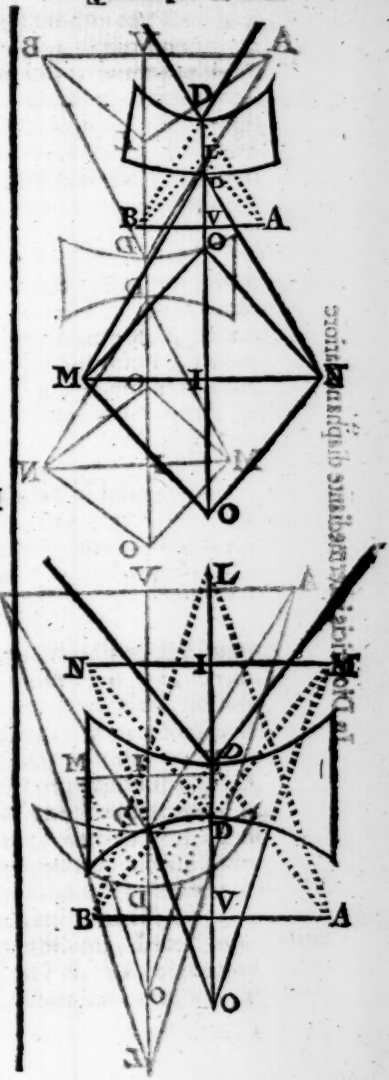
Visibile post oculum.



Visibile ante oculum

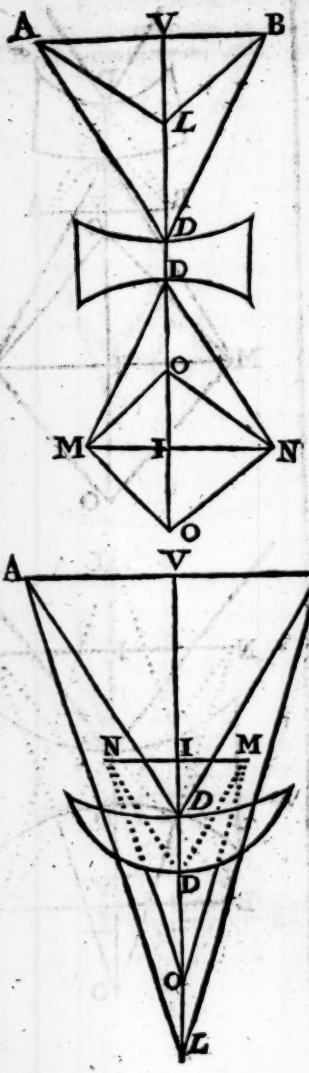


Visibile post oculum



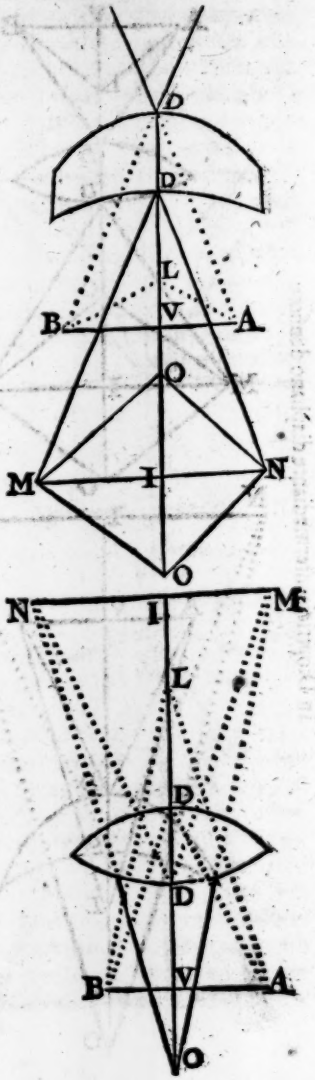
In Diopticis intermediante diaphano denſiore

Visibile ante oculum



In Dioptricis intermediante diaphano rariore

Visibile post oculum



rum angulorum æquales; adeoq; & quadrata chordarum æqualia; unde, illustrationes æquales erunt: Nempe, illustratio radiorum puncti V, in foramine uveæ L; & illustratio radiorum puncti V, in foramine uveæ O: oculus igitur in L, eodem modo videt punctum visibile V, illustratum; quo oculus in O videt illius imaginem illustratam. Eodem quoque modo hæc æqualitas illustrationis in omnibus punctis visibilis A V B manifesta fiet; quod erat demonstrandum.

Scholium.

Si autem V L, ad V D; vel I O, ad I D; majorem habeat proportionem; quam diameter foraminis uveæ, ad diametrum lentis, vel speculi, radiis illustrati; in hoc inquam casu, totum foramen uveæ, singulorum punctorum radiis illustrabitur; si æquale, præcisè; Si vero minorem, totum non illustrabitur; quod admonuisse sufficiat, demonstratio enim est manifesta.

Prop. 52. Problema.

Cujuslibet visibilis, distantia, & angulo visorio, datis; illius imaginem in quavis data mensura representare: data quoque crassitie lentis.

Sit visibile A V B, quodlibet, sive materia radians, sive imagó ante, vel post oculum, dummodo sit planum; in quo, sumantur duo puncta A, B. Sit igitur invenienda imago plani radiantis, A V B; in qua, punctorum A, B, imagines, distent recta data R. In recta A B, sumatur punctum quodlibet, prope ipsius medium, nimirum V; e quo ducatur, plano A V B perpendicularis, V D, æqualis distantiæ visibilis datæ, quæ producatur in infinitum: Et sumatur in ea, D D, æqualis lentis crassitiei; fiatque, ut A B, ad V D; ita R, ad D I. Et radii ab V divergentes, si visibile sit ante oculum; vel ad V convergentes, si post oculum; divergantur a puncto I, ope lentis, vel speculi, cujus vertices D D; & per I, ducatur planum, plano visibilis A V B, parallelum. Dico, imaginem visibilis A V B, apparere in plano M I N, ita ut imagines punctorum A, B, distent recta data R. Quoniam enim, visibile A V B, 23, 24, &c. Hujus.

A, B, supponitur planum; apices conorum radiosorum, omnium, ibius punctorum, existunt in plano M I N, cujus scholio ad *Prop.* 43. hujus satis patet. Sint igitur apices conorum radiosorum, punctorum A, B, puncta M, N; & erunt puncta M, I, N, in una linea recta; quoniam A, V B, sunt in una recta: radii enim A D, B D, sunt in eodem plano, cum axe: & ideo, superficies illorum, sive reflectionis, sive refractionis, una est, & eadem: reflectuntur igitur, vel refringuntur, in uno plano cum axe, quod planum, secat planum imaginis, in recta M I N: & ob æqualitatem angulorum, A D V, I D N; triangula A D V, I D N, sunt similia: Et ut

D V . D I :: A V . I N;

eodem modo, ut

D V . D I :: V B . I M;

ergo, ut

D V . D I :: A B . M N;

erat autem, ut

D V . D I :: A B . R;

igitur R, & M N, sunt æquales. Imagines autem punctorum A, B, apparent in apicibus, conorum suorum radiosorum, hoc est in M, & N, distantibus, recta R: Quod faciendum erat.

Eodem etiam modo, possunt imagines visibilium, infinite distantium, in data mensura representari, *v. g.* Sit angulus A D B, angulus visorius, alicujus visibilis, infinite distantis, quem subtendat recta A B, fiatq; ut A B, ad R; ita perpendicularis in subtendentem, D V, ad D I; & radii, paralleli ipsi D V, divergantur a puncto I, lente vel speculo cujus vertices D, D, eodem modo, ut hactenus dictum.

18, 29, &c. *Hujus.*

Scholium.

Si autem recta A B fuerit adeo parva; ut non potest commode projici, in rectam, æqualem ipsi R: projiciatur ipsius A B imago, in rectam, minorem ipsa R; quæ imago, eodem modo, ac si esset ipsum visibile, rursus projiciatur, in aliam imaginem, æqualem ipsi R: Quod si adhuc fieri non possit, reiteranda erit operatio. Notandum tamen si recta R, sit nimis longa respectu parvitatis lentis, vel speculi; imaginem M N, futuram, confusam, & indistinctam, versus extremitates M, & N; in medio vero I, circiter axem; lentis vel speculi productum, semper erit distinctissima; quoniam imago puncti visibilis V, projicitur in I, ad rigorem Geometricum.

Si

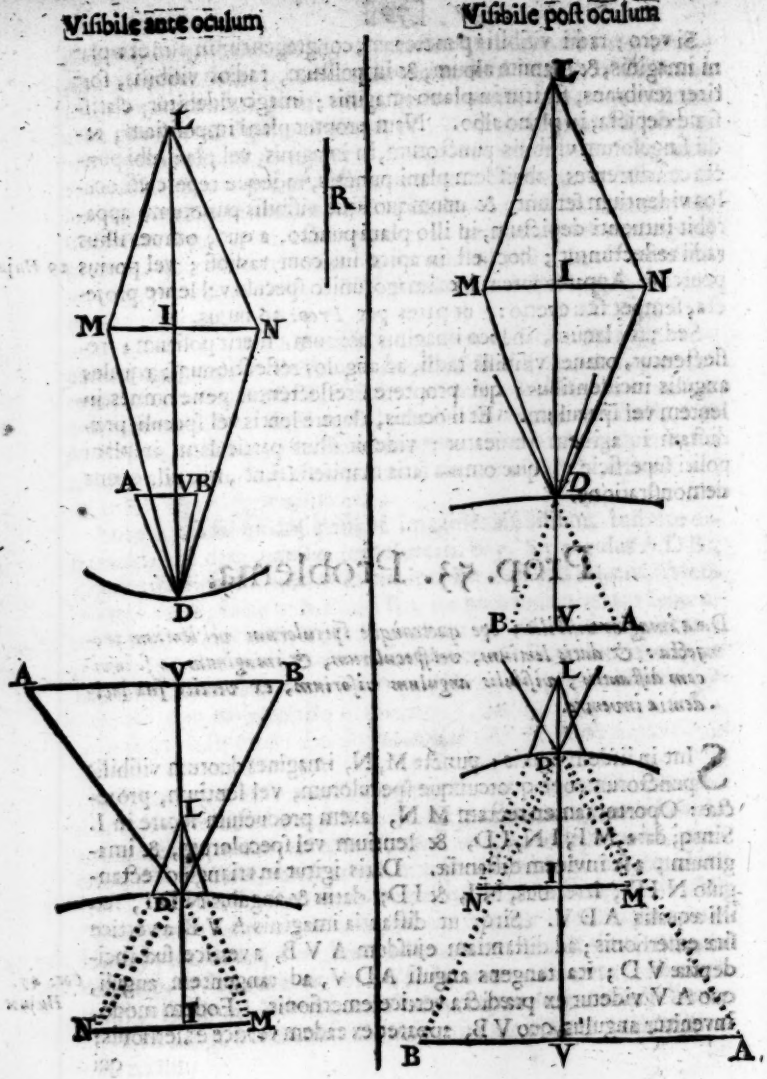
Si vero; radii visibilis punctorum, congregentur in puncta plani imaginis, & planum album, & impolitum, radios visibilis, fortiter revibrans, figatur in plano imaginis; imago videbitur, clarissime depicta, in plano albo. Nam propter plani impolitiam, radii singulorum visibilis punctorum, in imaginis, vel plani albi puncta concurrentes; ab iisdem plani punctis, indeque repercussi, oculos videntium feriunt; & unumquodque visibilis punctum, apparebit intuenti depictum, in illo plani puncto, a quo, omnes illius radii reflectuntur; hoc est in apice sui coni radiosi; vel potius 29 *Hujus.*
penicilli. Apparet autem hæc imago, unico speculo vel lente projecta, semper situ everso: ut patet per *Prop.* 46 hujus.

Sed; si planum, in loco imaginis positum, fuerit politum; reflectentur, omnes visibilis radii, ad angulos reflectionum, æquales angulis incidentibus; qui propterea reflectentur pene omnes in lentem vel speculum. Et si oculus, a latere lentis vel speculi, prædictam imaginem intueatur; videbit illius particulam, in plani politi superficie: quæ omnia satis manifesta sunt, nec ulla egent demonstratione.

Prop. 53. Problema.

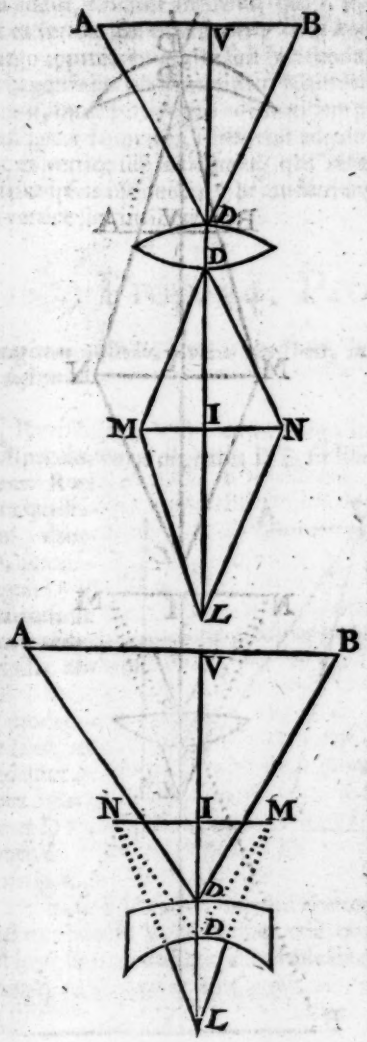
Data imagine visibilis; ope quotcunque Specularum vel lentium projecta: & datis lentium, vel specularum, & imaginum, a se invicem distantiis; visibilis angulum viforium, ex vertice suæ incidentiæ invenire.

SInt in iisdem figuris; puncta M, N, imagines duorum visibilis punctorum, ope quotcunque specularum, vel lentium, projectæ: Oportet tamen rectam M N, axem productum secare in I. Sintq; data, M I, I N, I D, & lentium vel specularum, & imaginum, a se invicem distantiæ. Datis igitur in triangulo rectangulo N I D, lateribus, N I, & I D; datur & angulus N D I, seu illi æqualis A D V. Sitq; ut distantia imaginis A V B, a vertice suæ emersionis; ad distantiam ejusdem A V B, a vertice suæ incidentiæ V D; ita tangens anguli A D V, ad tangentem anguli, *Cor.* 47. *Hujus*
quo A V videtur ex prædicta vertice emersionis. Eodem modo, invenitur angulus, quo V B, apparet ex eadem vertice emersionis; qui

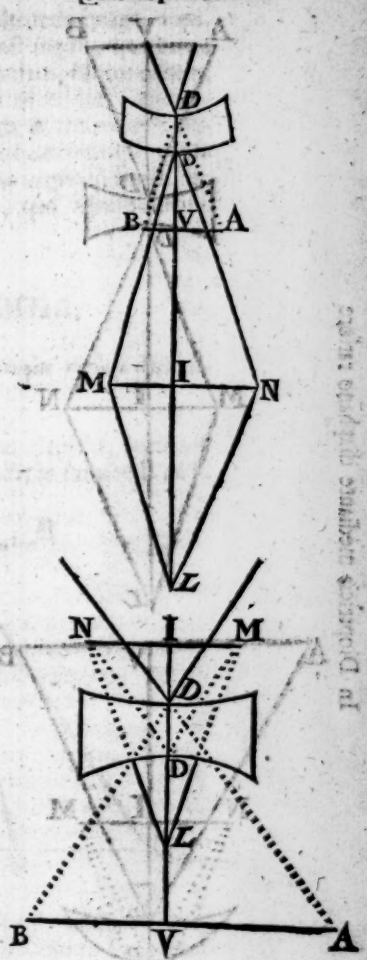

Visibile ante oculum
L
R
M
I
N
A
V
B
D
A
V
B
L
D
N
I
M
Visibile post oculum
L
M
I
N
D
B
V
A
L
D
I
N
M
B
V
A

In Dioptricis mediante diaphano denſore

Viſibile ante oculum

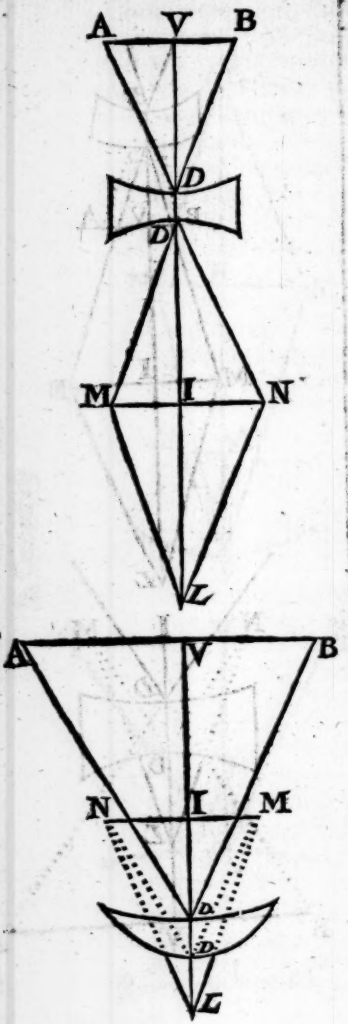


Viſibile poſt oculum

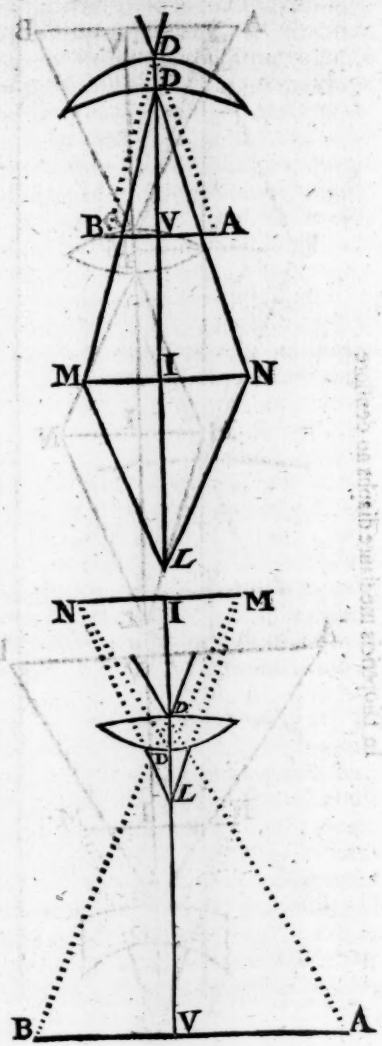


In Dioptricis mediante diaphano rariore

Visibile ante oculum



Visibile post oculum

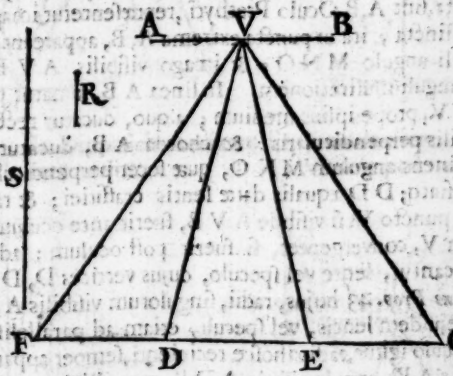


qui additi, efficiunt angulum, quo A B, ſeu ſecunda imago, apparet ex vertice ſuæ emerſionis; qui, æqualis eſt angulo, quo tertia imago apparet, ex vertice ſuæ incidentiæ: quo dato, dantur eadem, inter pertinentia ad imaginem ſecundam, & ad tertiam; quæ dabantur, inter pertinentia ad imaginem primam, & ſecundam: eodem igitur ratiocinio, reperietur angulus, quo quarta imago, apparet ex vertice ſuæ incidentiæ, quo invenimus angulum tertiæ, ex vertice ipſius incidentiæ; & tandem angulus, quo viſibile videtur ex vertice ſuæ incidentiæ.

Prop. 54. Problema.

Imaginem viſibilis, in plano depictam, in quacunque ratione data, illuſtrare.

SIt viſibile A V B; cujus imago in plano depicta, lente vel ſpeculo, cujus diameter D E; ſit illuſtranda, in ratione R ad S. Sit ut R ad S, ita quadratum chordæ, ſemiſſis anguli D V E, ad quadratum chordæ, ſemiſſis anguli F V G. Et producatur lens, vel ſpeculum, cujus diameter D E, ex omni parte in G, & F; ita ut F V G, fiat angulus diametri, ſentis, vel ſpeculi productæ, ex puncto V. Factumq; erit quod proponitur. Lens enim vel ſpeculum productum, ampliabit imaginis illuſtrationem, in ratione R ad S: ut patet per Corollarium 2 *Prop.* 33 hujus.



Corollarium

Hinc ſequitur modus, intendendi vires machinarum comburentium, in ratione data; harum enim machinarum vires maximæ, ſive comburant ope ſolis, ſive ignis, ſemper exiſtunt in ſolis vel ignis imagine, & in quacunque ratione augmentatur illuſtratio; in eadem ratione, augmentatur & uſtio: ut per *Prop* 33 hujus, & ejus conſectaria ſatis patet.

Prop. 55. Problema.

Cujuſlibet viſibilis imaginem, quovis angulo viſorio, cum illius anguli illuſtratione, presbytis diſtinctam repræſentare; cum data lentis craſſitie.

SIt A V B viſibile quodlibet, ſive materia radians, ſive imago ante, ſive poſt oculum, dummodo ſit planum; cujus extrema puncta, ſint A, B. Oculo Presbyti, repræſentetur imago viſibilis A V B, diſtincta, ita ut puncta extrema A, B, appareant angulo viſorio, æquali angulo M N O; & imago viſibilis A V B habeat, illius anguli illuſtrationem. In linea A B, ſumatur punctum quodlibet V, prope ipſius medium; a quo, ducatur recta V D, plano viſibilis perpendicularis: & chorda A B, ducatur circuli portio continens angulum M N O, quæ ſecet perpendicularem V D, in D: fiatq; D D æqualis datæ lentis craſſitiei; & radii, divergentes a puncto V, ſi viſibile A V B, fuerit ante oculum; vel ad punctum V, convergentes, ſi fuerit poſt oculum; ad paralleliſmum reducantur, lente vel ſpeculo, cujus vertices D, D: & per *Corollarium Prop.* 43 hujus, radii, ſingulorum viſibilis A B punctorum, ope ejuſdem lentis, vel ſpeculi, etiam ad paralleliſmum reducentur: oculo igitur, radios hoſce recipienti, ſemper apparebit imago viſibilis A B, angulo viſorio A D B, cum illius anguli illuſtratione: & presbytis diſtincta; quod faciendum erat.

19, & 21, *Hujus.*

44. *Hujus. Cor.* 2.

49. *Hujus.*

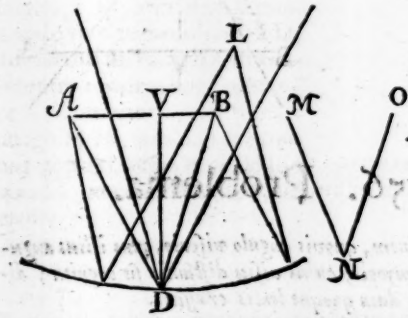
Scholium.

Scholium.

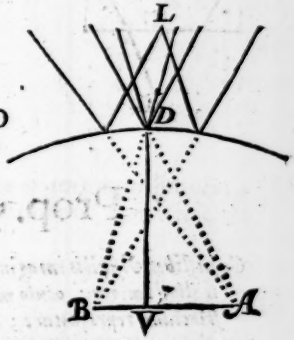
Si autem, ob visibilis A B distantiam inaccessibilem, vel parvitatem, commode non poterit sumi angulus A D B, æqualis angulo M N O; projiciantur imagines, punctorum A, B, in rectam, æqualem datæ, quæ satis commode, angulum M N O subtendere possit; & eodem modo, cum imagine procedendum; ac si esset visibile datum.

In Catoptricis

Visibile ante oculum:

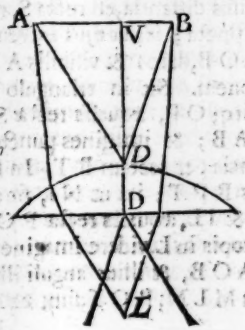


Visibile post oculum:

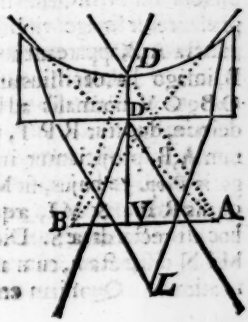


In Dioptricis mediante diaphano densiore.

Visibile ante oculum:



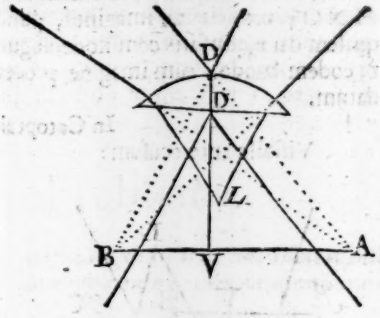
Visibile post oculum:



In Dioptricis mediante diaphano rariore

Visibile ante oculum:

Visibile post oculum:



Prop. 56. Problema.

Cujuslibet visibilis imaginem, quovis angulo visorio, cum illius anguli illustratione; oculo myopis, cujus visus distantia sit cognita; distinctam repræsentare; data quoque lentis crassitie.

Sit A V B, visibile quodlibet, sive materia radians, sive imago ante, sive post oculum, dummodo sit planum; cujus extrema puncta sint A, B. Oculo myopis, cujus visus distantia, est recta S, repræsentetur imago visibilis A V B, distincta; ita ut ejus extrema puncta A, B, appareant angulo visorio, A O B, dato; & visibilis A V B, imago habeat illius anguli illustrationem. Sit in triangulo A O B, O V normalis ad basem A B; sitq; O P, æqualis rectæ S; deinde, ducatur R P T, parallela basi A B; & imagines punctorum A, B, projiciantur in puncta, distantia per rectam R T. In figuris *Prop.* 52 hujus, sit M I N, æqualis R P T; ita ut N I, sit æqualis R P; & M I, æqualis ipsi P T, & I L, æqualis rectæ P O; hoc est rectæ datæ S. Dico, oculum myopis in L, videre imaginem M I N distinctam, cum angulo visorio A O B, & illius anguli illustratione. Quoniam enim, Triangula M L N, R O T, sunt æqua-

lia

lia, & ſimilia; triangulum M L N, eſt ſimile triangulo AOB; & ut

AB : MN : : VO : IL;

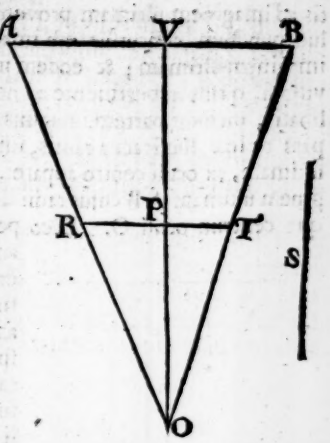
ut autem

AB : MN : : VD : ID;

igitur, ut

VD : VO : : ID : IL;

cumque ſit, ut diſtantia viſibilis a vertice incidentiæ, V D; ad diſtantiam viſibilis, ab oculi centro, V O; ita diſtantia imaginis, a vertice emerſionis, I D; ad diſtantiam imaginis, ab oculi centro: eodem angulo, & eadem illuſtratione, apparebit imago M N, oculo in L; quibus apparet viſibile oculo in O: apparet etiam imago diſtincta; quia I L, æqualis eſt rectæ S, datæ viſus diſtantiæ: Quæ facienda erant.

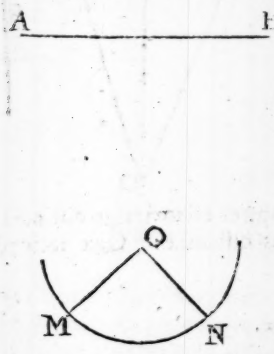


50. *Hujus.*

Scholium.

In prioribus duabus propoſitionibus, loquuti ſumus de methodo generali componendi teleſcopia, & microſcopia; in quibus conſideravimus imaginis diſtinctam viſionem, augmentationem, & illuſtrationem: Reſtat autem aliud conſiderandum, nempe angulus, quo videtur pars imaginis viſa; ſi modo tota non videatur. Primo tamen ſciendum eſt lentes, & ſpecula conica, non minus quam ſphærica, viſibilium in focis non exiſtentium, imagines, ſatis ſenſibiliter projicere; ut in ſphæricis ſuo modo demonſtrant Opticæ ſcriptores: unde evenit, quod imago pertinentis ad imaginem ultimam, projiciatur per pertinentia ad imagines reliquas, donec tandem in oculum incidat: Sciendum tamen imagines viſibilis, & imagines pertinentis ad imaginem ultimam, ex iiſdem confici radiis; ubi enim radii ab uno puncto viſibilis emergentes, in aliud punctum concurrunt; illud punctum concurſus, eſt imago prioris puncti viſibilis; & ubi radii etiam viſibilis ab uno puncto pertinentis

tis ad imaginem ultimam provenientes, in aliud concurrunt; illud punctum concursus est imago prioris puncti pertinentis ad imaginem ultimam; & eodem modo de omnibus punctis tam in visibili, quam in pertinente ad imaginem ultimam. Hisce prælibatis, dicimus partem imaginis visam, apparere eo angulo, quo pars retinæ illustrata a radiis, imaginis, pertinentis ad imaginem ultimam, ex oculi centro apparet. Sit imago pertinentis ad imaginem ultimam A B cujus radii illustrent partem retinæ M N, sitque centrum oculi O. Dico portionem imaginis visam apparere angulo visorio M O N. Quoniam enim radii, qui proveniunt a pertinente ad imaginem ultimam, etiam proveniunt a visibili: ideo idem spatium M N illustratur etiam a radiis visibilis; igitur puncta M N sunt extrema visibilis puncta in oculi retina depicta, quæ apparent angulo visorio M O N; unde patet propositum. Ex hoc sequitur (si oculi centrum O ponatur in imagine pertinentis ad imaginem ultimam *e.g.* in recta A B, quod semper fieri potest, quando secunda imago est ante oculum) Partem imaginis visam totum pertinens ad imaginem primam implere; cumque pertinens ad imaginem primam, poterit dilatari ad libitum; potest quoque & angulus visorius partis imaginis visæ augmentari ad libitum: De portione itaq; imaginis visa hæc pauca dixisse sufficiat.



Prop. 57. Problema.

Dato imaginis angulo visorio, ope quotcunque specul orum, vel lentium, in oculum allato; & datis, lentium vel specul orum, imaginum, & oculi, a se invicem distantiis; visibilis angulum visorium, ex vertice suæ incidentiæ invenire.

SIt in figuris *Prop.* 52 & 53 hujus; M L N, angulus visorius, quo comprehenditur imago ope quotcunque lentium vel specu-

lorum,

lorum, datus; ſintq; dati anguli I L N, I L M, & L I, diſtantia oculi ab imagine prima; in triangulo igitur rectangulo L I N, datis, angulo I L N, & latere I L, datur & latus I N; eodemq; modo reperitur I M: data igitur viſibilis imagine, M N; ope quotcunque lentium, vel ſpeculorum, projecta: & datis, lentium, vel ſpeculorum, & imaginum, a ſe invicem, diſtantiis; inveniatur, viſibilis angulus viſorius, ex vertice ſuæ incidentiæ per *Prop.* 53 hujus: quod erat faciendum.

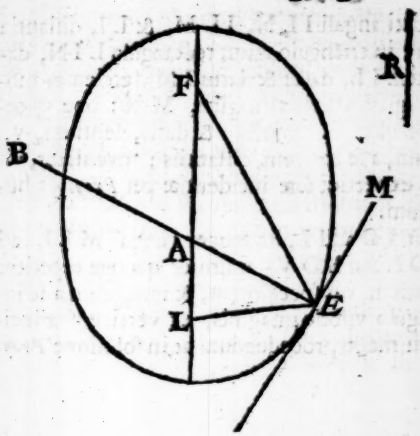
Expeditius tamen; ut I D ad I L, ita tangens anguli M L I, ad tangentem anguli M D I, ſeu B D V; ſimiliter quoque reperitur V D B; datis itaq; lentium, vel ſpeculorum, & imaginum a ſe invicem diſtantiis, & angulo viſorio imaginis, ex vertice ſuæ incidentiæ, A D B; eodem modo procedendum ut in ſolutione *Prop.* 53 hujus.

Prop. 58. Problema.

Datis; ſpecie ellipſeos, uno foco, & poſitione axeos; dataq; linea, axem, poſitione datum, ſecante: ellipſim invenire, cujus circumferentiæ, perpendicularis ſit linea data.

SIt recta AB, utrinq; producta; ſecans axem, poſitione datum FA, in puncto A: ſitque invenienda ellipſis, cujus focus F, & axis in linea FA; ratio diſtantiæ focorum, ad axem ellipſeos, ut R ad S; ita, ut BA recta, incidens in circumferentiam ellipſeos, in puncto E, ſit rectæ, E M ellipſim tangenti, in puncto E, perpendicularis. Sit ut R ad S, ita FA, ad FE; ſitq; angulus AEL, æqualis angulo FEA; & jungatur recta EL. Dico F, L, puncta, eſſe focos, & FE, EL, ſimul, eſſe æquales axi ellipſeos quæſitæ. Deſcripta enim tali ellipſi, recta BAE dividens angulum LEF bifariam, erit perpendicularis ad contingentem in puncto E, nempe M E; & quoniam anguli L E A, A E F ſunt æquales; erit ut FE, ad FA, ita E L, ad L A; igitur ut F E ad F A, hoc eſt S ad R, ita FE, EL

 ſimul



simul, nempe axis ellipseos, ad FA, AL simul, nempe FL distantiam focorum: est igitur ellipsis, focis FL, descripta, & transiens per punctum E, ellipsis quæsita; quod ostendendum erat.

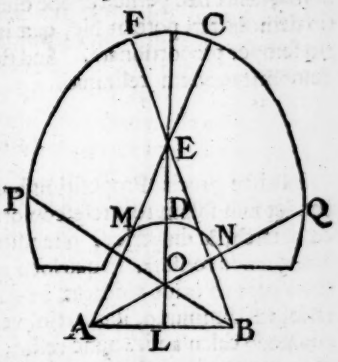
Prop. 59. Problema.

Ex unica lente, telescopium fabricare, cujus ope presbyti comprehendant angulum visorium visibilis longinqui quantumlibet exilem, cum distincta visione.

Sit angulus visorius visibilis longinqui AEB, sitq; telescopium ex unica lente construendum, cujus ope presbytus videat, visibilis longinqui imaginem distinctam, cum angulo visorio AOB: sint duo triangula isosceles AEB, AOB super eadem basi AB; ducaturq; recta EOL, in basem AB perpendicularis, & eam bifariam secans in L. Deinde foco L, axeos positione LE, describatur ellipsis densitatis illius diaphani densioris, e quo fabricanda est lens, & aeris, in quo exsistas oculus; ita ut recta BE producta, illius circumferentiæ sit perpendicularis in F; & in eadem ellipsi, AE producta erit perpendicularis circumferentiæ in C; eodem quoq; foco L, & eadem axeos positione LB, describatur ellipsis prioris etiam densitatis, ita ut recta BO producta, illius circumferentiæ sit perpendicularis in M; & in eadem ellipsi, AO producta, erit perpendicularis circumferentiæ in N; & ex revolutione harum ellipsium

58. *Hujus.*

lipſium circa communem axem E L, ſiat lens quædam ex diaphano denſiore prædicto, convexa ad partes F C, & concava ad partes M N. Dico oculum presbyti in concavitate M N, videre viſibile longinquum, cujus angulus viſorius A E B, habens centrum in axe lentis producto, diſtinctum, per angulum viſorium M O N ſeu A O B. Sunt enim extrema viſibilis puncta in uno plano cum axe lentis ex hypotheſi; quoniam centrum viſibilis eſt in axe lentis producto; & igitur communis earum ſuperficies refractionis, eſt eadem figura ex cujus revolutione genita eſt lens, nempe F C M N, & E C, E F productæ exacte comprehendunt viſibile, quoniam angulus F E C eſt æqualis ejus angulo viſorio; & igitur radii extremorum viſibilis punctorum in ſuperficiem refractionis communem normaliter incidentes, id eſt axes



penicillorum, extremorum viſibilis punctorum, ſunt radii C E, F E, & igitur apices penicillorum, extremorum viſibilis punctorum, ſunt B, A, communes nempe ſectiones axium penicillorum extremorum viſibilis punctorum cum plano per foco L ducto, cui perpendicularis eſt axis lentis. Deindeſi A O, B O in communi refractionis ſuperficie producantur ad lentis ſuperficiem in P, & Q, & ducantur radii extremorum viſibilis punctorum incidentes in P & Q; refringentur hi radii, in apices ſuorum penicillorum A & B; cumq; ſint recti ad ſuperficiem communem refractionis in M & N; irrefractè penetrabunt ad A, & B; ſuperficies autem refractionis N D M omnes radios in ſe incidentes, & ad puncta rectæ A L, B tendentes, reducit ad paralleliſmum illis radiis directe in ſuperficiem M D N incidentibus, & irrefractè penetrantibus; ut facile deducitur ex *Prop.* 17, & 37 hujus: omnes igitur radii extremorum viſibilis punctorum reducuntur ad paralleliſmum lineis O B, O A; & igitur viſibile videtur angulo viſorio æquali ipſi A O B; apparet autem, & presbytis diſtinctum, quoniam ſingulorum viſibilis punctorum radii, poſt egreſſum e lente ſunt paralleli; quod oſtendendum erat. 38. *Hujus.*

Scholium.

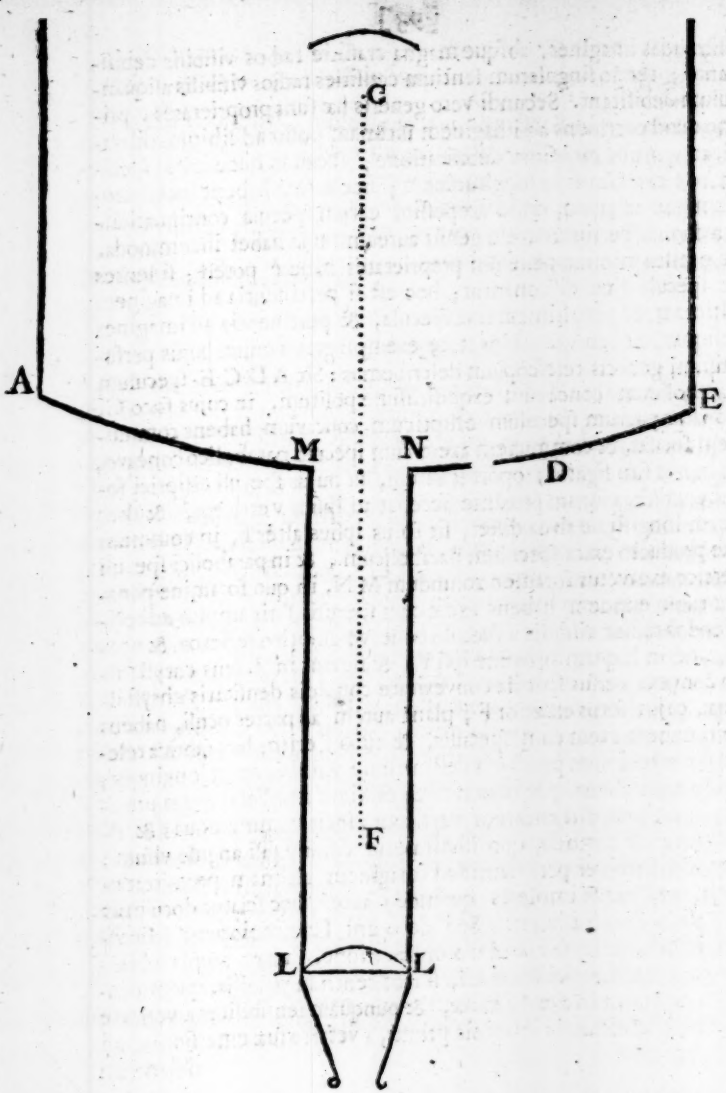
Poterat etiam hoc Problema resolvi, ope diaphani rarioris inter visibile & oculum; sed quoniam nullius est utilitatis, demonstrationem ejus prætermittimus, perficitur autem ope hyperbolæ densitatis, sicuti hæc perficitur ope ellipseos. Eadem etiam illustratio demonstrari poterat hic, quæ in prioribus, nempe angulo visorio semper proportionata. Sed studiosis exercendi ingenii gratia, demonstrationem relinquo.

Epilogus.

Ex hisce paucis Propositionibus generaliter hic demonstratis, pendet non solum tota telescopiorum doctrina, sed etiam universa catoptrica, & dioptrica; ostenditur enim, quando fiat visio distincta, quando confusa, in quo loco existat visibilis imago, & quanta illius pars ab oculo videatur, in qua ratione fiat imaginis augmentatio, vel diminutio, illustratio, vel obscuratio, quomodo facienda, quomodo calculanda: nunc restat, ut pauca quædam de telescopiorum generibus dicamus. In hunc usq; diem, duæ sunt tantum machinæ opticæ præcipuæ; nempe telescopia ad remota aspicienda, & microscopium ad propinqua; quibus nos tertiam adjicimus; nempe Icoscopium, ad projiciendas visibilium imagines, in *Prop.* 52 hujus demonstratum: atq; hæ machinæ sunt trium generum; nimirum vel ex puris dioptricis, hactenus tantum cognitis; vel ex puris catoptricis; vel ex mixtis, partim catoptricis, partim dioptricis: Deinde in unoquoq; genere infinitæ possunt esse species, nempe, ex 2, 3, 4, *&c.* lentibus in primo; speculis in secundo; lentibus, & speculis in tertio: & in singulis illis speciebus sunt adhuc duæ subdivisiones, una repræsentat imaginem in situ erecto, altera in situ everso, e quibus illa semper est preferenda cæteris paribus, quæ repræsentat imaginem in situ vero, & erecto. Primi autem generis, nempe e puris dioptricis, hæc est sola proprietas; quod possit lentibus quotvis continuari, ita ut visibile quantum libet amplificetur; hæc autem habet incommoda: primo ipsius species plerunq; in longitudinem non satis tractabilem excrescunt; secundo pertinens ad imaginem ultimam non potest satis dilatari ad illustrandas

luſtrandas imagines, abſque magna craſſitie radios viſibilis debilitante; tertio ſingularum lentium craſſities radios viſibilis aliquantulum debilitant. Secundi vero generis hæ ſunt proprietates. primo quod pertinens ad imaginem ultimam poſſit ad libitum dilatari, abſque ulla radiorum debilitatione; ſecundo quod ipſius ſpecies non excreſcant in longitudinem; hoc autem habent incommodum non exiguum, quod vix poſſint earum ſpecula continuari ultra duo. Tertium autem genus aureum nulla habet incommoda, & omnes priorum generum proprietates habere poteſt; ſi lentes & ſpecula rite diſponantur; hoc eſt ſi pertinentia ad imaginem ultimam, & penultimam ſint ſpecula, & pertinentia ad imagines reliquas ſint lentes. Nos itaq; exempli gratia unum hujus perfectiſſimi generis teleſcopium deſcribemus: Sit A D C E ſpeculum parabolicum concavum exquiſitiſſime politum, in cujus foco C, ponatur parvum ſpeculum ellipticum concavum habens communem focum, & communem axem cum ſpeculo parabolico concavo, & in hoc ſitu figatur; oportet autem, ut hujus ſpeculi elliptici focus prædictus quam proxime accedat ad ipſius verticem, & alter quam longiſſime ab ea diſter, ſit focus ipſius alter F, in communi axe producto extra ſpeculum parabolicum, & in parabolici ſpeculi vertice excavetur foramen rotundum M N, in quo foramine ponatur tubus eundem habens axem cum ſpeculis, ſatis amplus ad recipiendos radios viſibilis a ſpeculo concavo elliptico reflexos, & producatur in L quam proxime ipſi F; & figatur in L lens chryſtallina convexa verſus ſpecula convexitate conoidis denſitatis chryſtallinæ, cujus focus exterior F, plana autem ad partes oculi, habens communem axem cum ſpeculis, & tubo; eritq; hæc fabrica teleſcopium optimum presbytis deſtinatum: viſibilia enim longinqua, oculo apparebunt, per tubum diſtinctiſſime ampliata, quam proxime in ratione diſtantiarum verticum a focis communibus; & illuſtrata eodem modo, quo illuſtraretur viſibile tali angulo viſum; ſi modo diameter pertinentis ad imaginem ultimam permittat uveam oculi radiis impleri; quomodo autem hoc ſciatur docuimus in *Scholio Prop.* 51 hujus. Sed de omni Teleſcopiorum, Microſcopiorum, & Icoſcopiorum amplificatione, ſit hæc regula obſervanda: (geometrica enim eſt, ſi tam centrum viſibilis, quam centrum oculi, ſint in axe machinæ, & nunquam ſenſibiliter a veritate aberrat) ut diſtantia imaginis primæ, a vertice ſuæ emerſionis, ad

diſtantiam


C
A
E
M
N
D
F
L
L

distantiam ejusdem ab oculi centro, ita tangens semianguli visorii imaginis primæ ex oculi centro, ad tangentem semianguli visorii ejusdem imaginis primæ, ex vertice suæ emersionis, vel semianguli visorii imaginis secundæ, ex vertice suæ incidentiæ: & rursus ut distantia imaginis secundæ a vertice suæ emersionis, ad distantiam ejusdem a vertice suæ incidentiæ; ita tangens semianguli visorii imaginis secundæ ex vertice suæ incidentiæ, ad tangentem semianguli visorii imaginis secundæ e vertice suæ emersionis, vel semianguli visorii imaginis tertiæ ex vertice suæ incidentiæ; & ita progrediatur ad semiangulum visorium imaginis ultimæ ex vertice suæ emersionis, seu visibilis ex vertice suæ incidentiæ, qui semiangulus duplicatus dat angulum visibilis quæsitum ex vertice suæ incidentiæ. Demonstrationem videre licet in *Prop.* 53 & 57 hujus.

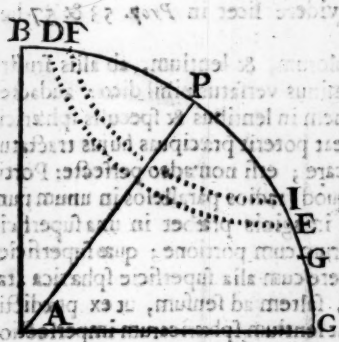
De Mechanica horum speculorum, & lentium, ab aliis frustra tentata; ego in mechanicis minus versatus nihil dico: audacter tamen asſero, opticæ perfectionem in lentibus & speculis sphæricis frustra quæri. Si vero cui placeat poterit præcipuas hujus tractatuli propositiones, sphæricis applicare; etsi non adeo perfecte: Portio enim sphæræ (præterquam quod radios parallelos in unum punctum non congreget) locum imaginis præbet in una superficie sphærica, habente idem centrum cum portione; quæ superficies non potest omnimodo concurrere cum alia superficie sphærica itatis tamen concursus requiritur, saltem ad sensum, ut ex prædictis satis apparet. Aliæ etiam sunt lentium sphæricarum imperfectiones, a dictis emergentes; veluti, quod in telescopiis multum amplificantibus, pertinens ad imaginem ultimam. vix poterit ultra duos vel tres gradus dilatari; ut computanti satis patebit: unde provenit horrenda obscuritas. At contra, lentes hyperbolicas solum objicitur, quod nihil possit distinctissime videri, præter punctum visibilis, in axe machinæ existens: Sed hæc infirmitas (si ita appellare liceat) in ipso oculo est satis manifesta; non tamen naturæ imputanda; quæ nihil frustra, sed omnia quam commodissime peragit. Nihilominus, lentibus, & speculis conicis non concessis; satius erit portionibus sphæricis uti loco sphæroideon, & conoideon parabolicarum, in catoptrica; quam hyperbolicarum in dioptrica; cum quibus portiones sphæricæ minus conveniunt.

Hinc itur ad astra.

Prop.

Prop. 60. Problema.

Datis duabus altitudinibus, Phænomeni circumpolaris, in meridiano; cum altitudine poli: datarum altitudinum, parallaxium ſumma vel differentiam invenire.



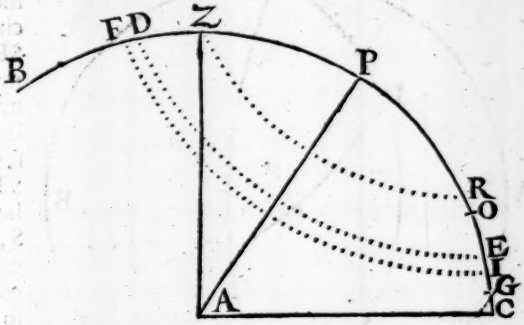
IN hoc Problemate, tres ſunt caſus diverſi; primus caſus, eſt quando altitudo meridiana, ſupra polum, obſervatur inter polum & verticem; in quo ſit A B C, quadrans meridiani circuli, P polus, D & E vera loca Phænomeni, ſupra & infra polum, adeoq; a polo æquidiſtantia: Loca vero apparentia ſint F, G, infra loca vera; ſitq; P I arcus, arcui P E, æqualis. Dico I G arcum eſſe ſummam parallaxium quæſitam. Quoniam enim, arcus P D, & P E, ſunt æquales; & arcus P I, arcui P F; erit & E I ipſi D F æqualis; qui D F eſt paralaxis, ſuperioris obſervationis; & E G, parallaxis inferioris; arcus ergo I G, eorum ſumma; eſt ſumma parallaxium quæſita. Quam invenire oportuit.

Secundus caſus eſt, quando zenith cadit inter polum & altiorem obſervationem; in quo ſit B Z C, circulus meridianus; P polus, Z zenith, D, & E, vera loca Phænomeni, ſupra & infra polum, F, & G, loca apparentia; ſit P I arcus, æqualis arcui P F; qui minor eſt arcu P G, per ipſum I G. Dico arcum I G, eſſe differentiam parallaxium quæſitam. Eſt enim arcus P D, æqualis arcui P E, ex eo quod D, & E, ſint vera loca Phænomeni; erit igi-

tur

tur, & DF parallaxis ſuperioris obſervationis, æqualis EI; cumq; EG, ſit parallaxis inferioris obſervationis, erit earum differentia IG, differentia parallaxium quæſita; quam invenire oportuit.

Tertius caſus, in quo Phænomenon obſervatur in zenith, eſt facilimus; quoniam differentia diſtantiarum apparentium a polo, nimirum RO, æquatur, non ſolum differentiæ parallaxium, ſed etiam ipſi parallaxi, inferioris obſervationis; Phænomenon enim in vertice nullam habet parallaxem.



Prop. 61. Problema.

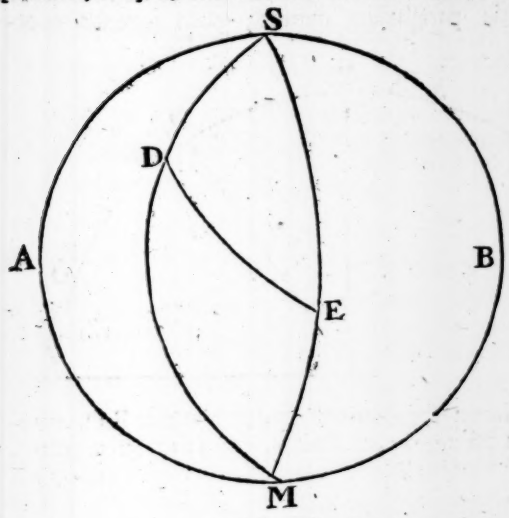
Datis longitudinibus, & latitudinibus, duorum locorum, in globo terreno; angulos, quos commune Azimuth, cum Meridianis locorum facit; & locorum diſtantiam invenire.

PRimo, Si loca iſta ſint ex diametro oppoſita; conſtat, omnes circulos Azimuthales eſſe communes.

Secundo, Si ſola latitudine differant, meridianus circulus eſt azimuth commune.

Tertio, Si longitudine tantum; vel longitudine, & latitudine differant;

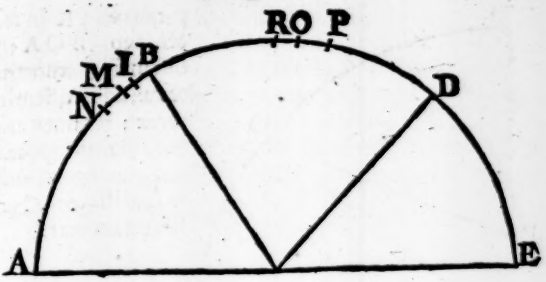
ferant; ſic inveſtigatur propoſitum. Sit A S B M terræ Hemiſphærium, in quo, ſunt loca *D*, & E, longitudine, & latitudine, differentiâ ducantur meridiani circuli, S D M, S E M, & azimuth commune D E; in triangulo ſphærico, D S E, dantur latera D S, E S, cum angulo ab iis comprehenſo D S E; ex quibus, inveniantur anguli S D E, & S E D, cum latere D E locorum diſtantia; quæ invenire oportuit.



Prop. 62. Problema.

Ex collatis, duabus altitudinibus, ejuſdem Phænomeni; ad idem tempus, in diverſis locis, & eorum azimuth communi, obſervatis: parallaxinn ſummam, vel differentiam, invenire.

SIt circulus A B D E, azimuth commune locorum; puncta verticalia ſint B, D: ſitq; primo inter vertices B, D, Phænomenon aliquod, cujus verus locus O; obſervatori vero infra B, videatur



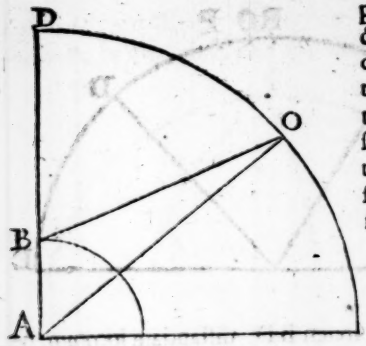
videatur in P; & obſervatori infra D, videatur in R; arcus ergo B P, D R, obſervati; ſi ſimul addantur, efficiunt arcum, excedentem arcum B D, diſtantiam locorum, per R P, ſummam parallaxium.

Secundo, extra arcum interceptum, B D, ſit I, verus locus, alicujus Phænomeni; obſervatori infra B, apparentis in M; obſervatori vero infra D, apparentis inferius in N. Subductis ergo arcubus, D B, B M, ſimul, ex arcu D N; remanebit M N, differentia parallaxium quæſita.

Prop. 63. Theorema.

Diſtantia Phænomeni, a centro terræ, eſt ad ſemidiametrum terræ; ut ſinus, diſtantiæ apparentis a vertice; ad ſinum parallaxeos.

SIt centrum terræ A, locus obſervatoris in terræ ſuperficie B, cujus zenith D; ſitque diſtantia phænomeni O, a centro terræ A O, eſt igitur D B O diſtantia apparens a vertice, & BOA,



parallaxis; & in triangulo rectilineo BOA; ut AO, distantia phænomeni a centro terræ; ad BA, semidiametrum terræ; ita sinus anguli DBO, seu distantiæ apparentis a vertice; ad sinum anguli BOA, seu parallaxeos. Quod demonstrandum erat.

Prop. 64. Theorema.

Sinus Parallaxium, sinubus distantiarum apparentium a vertice, sunt directe proportionales.

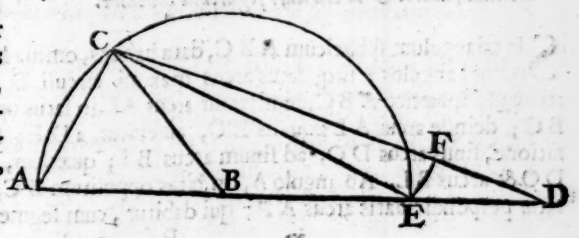
SInus enim, distantiarum apparentium a vertice, semper sunt ad sinus parallaxium, ut distantia Phænomeni, a centro terræ, ad semidiametrum terræ; ergo ut sinus, distantiæ apparentis a vertice, unius observationis; ad sinum parallaxeos ejusdem; ita sinus, distantiæ apparentis a vertice, alterius observationis; ad sinum suæ parallaxeos: & permutando; ut sinus distantiæ apparentis a vertice unius observationis; ad sinum distantiæ apparentis a vertice alterius observationis; ita sinus parallaxeos unius observationis; ad sinum parallaxeos alterius observationis; quod demonstrandum erat.

Prop. 65. Problema.

Data summa, vel differentia, duorum arcuum; cum sinuum ratione; ipsos arcus invenire.

SIt data arcuum summa, angulus A B C, & sinuum ratio, A B, ad B D; minore A B semidiametro, describatur semicirculus A C E;

A C E; & ducantur lineæ rectæ C D, C E, C A; atq; rectæ C A parallela ducatur E F. E itq; in triangulo rectilineo, C B D; ut C B, (id est A B) ad B D, ita sinus anguli C D B; ad sinum anguli B C D; manifestum est igitur istos angulos, nempe B C D, B D C, esse quæsitos; eorum enim summa, est angulus C B A, datus, & sinuum ratio, A B, ad B D data: manifestum quoq; est, angulum C E A, in circumferentia, esse semissem anguli C B A, in centro; & igitur angulus E C F, quo major quæsitorum, excedit semissem



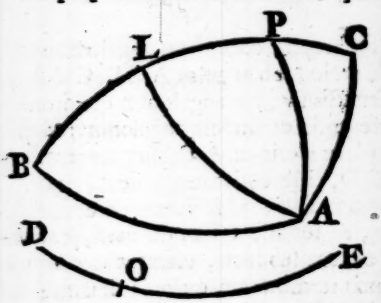
summæ E C B, est semissis differentiæ eorundem angulorum quæsitorum. Posito igitur C E radio; ob angulos A C E, C E F, rectos; erit A C tangens semissis summæ angulorum quæsitorum, & E F, tangens semissis differentiæ eorundem angulorum; & quia rectæ A C, E F, sunt parallelæ; erit ut A D, summa terminorum rationis sinuum; ad E D, differentiam eorundem; ita A C, tangens semissis summæ arcuum datæ; ad E F, tangentem semissis differentiæ; qua addita, ad semissem summæ datæ, producitur angulus major; vel ab eadem subducta, efficitur angulus minor. Vel, ut E D, differentia terminorum rationis sinuum; ad A D summam eorundem; ita E F, tangens semissis differentiæ arcuum datæ; ad A C, tangentem semissis summæ: qua data inveniuntur arcus ut prius. Quod erat faciendum.

Prop.

Prop. 66. Problema.

Dato triangulo ſphærico, & arcu circuli maximi; ductoq; ab angulo, trianguli ſphærici, in latus oppoſitum, arcu circuli maximi quolibet; e data ratione ſinuum, unius ſegmenti lateris, & differentia arcuum; lateris & arcus dati ſegmenta invenire.

SIt triangulum ſphæricum A B C, data habens, omnia latera, & omnes angulos; ſitq; datus arcus maximi circuli D E, & in triangulo ſphærico A B C, demittatur arcus A L, in latus oppoſitum B C; deinde arcui A L æqualis E O, auferatur, a D E; & e data ratione, ſinus arcus D O, ad ſinum arcus B L; quæritur, & arcus D O & arcus B L. Ab angulo A, in latus oppoſitum B C, demittatur perpendicularis arcus A P; qui dabitur, cum ſegmentis B P, P C; quoniam omnia latera, & omnes anguli dantur in triangulo ſphærico A B C. Ponatur itaque ſinus arcus A L 1 ♃, & in triangulo ſphærico rectangulo A P L, e datis ſinu arcus A P, & ſinu arcus A L; nempe 1 ♃; dabitur & ſinus arcus L P, in numeris coſſicis. Deinde datis, ſinu arcus L P, & ſinu arcus B P, dabitur & ſinus arcus B L eorum differentiæ, in numeris coſſicis. Et eodem modo; e datis, ſinu arcus D E, & ſinu arcus O E, nempe 1 ♃; dabitur & ſinus arcus D O, eorum differentiæ, in numeris coſſicis. Cumq; ſit data ratio, ſinus arcus D O, ad ſinum arcus B L; dabitur hinc æquatio, ex cujus reſolutione, innoteſcet valor radicis, ſinus nimirum arcus A L, vel arcus E O; quo dato, facile dantur reliqui, quæ invenienda erant.

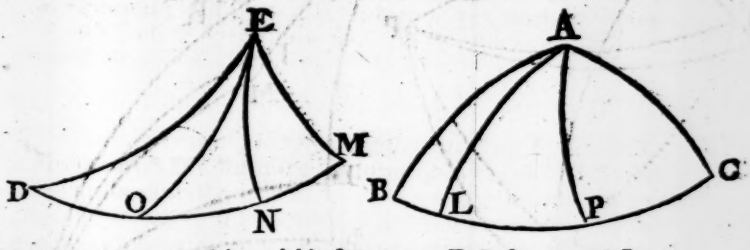


Prop.

Prop. 67. Problema.

Datis duobus triangulis ſphæricis; & ab uno utriuſque angulo, in latus oppoſitum, ducto arcu in utroque triangulo æquali: e data ratione ſinus, ſegmenti lateris unius trianguli; ad ſinum, ſegmenti lateris alterius trianguli; utriuſque lateris ſegmenta invenire.

SInt duo triangula ſphærica, A B C, E D M, data habentia, omnia latera, & omnes angulos; & ab uno utriuſq, angulo nempe A & E demittantur, in utriuſque latus oppoſitum, nimirum B C, D M, arcus æquales A L, E O: ſitque data ratio, ſinus arcus D O, ad ſinuum arcus B L. Quæritur uterque arcus, B L & D O. Ponatur ſinus arcus A L, ſeu ſinus arcus E O, (ſunt enim ex hypotheſi æquales) 1 ψ: deinde, eodem modo, quo in ſuperiore problemate, inveniatur & ſinus arcus D O, & ſinus arcus B L, in numeris coſſicis: cumque detur eorum ratio, ex hypotheſi; Dabitur



hinc æquatio; quæ reſoluta, dabit ſinum arcus E O, ſeu arcus A L, valorem radicis; & eo reperto, facile dabuntur reliqua, quæ invenienda erant.

Scholium.

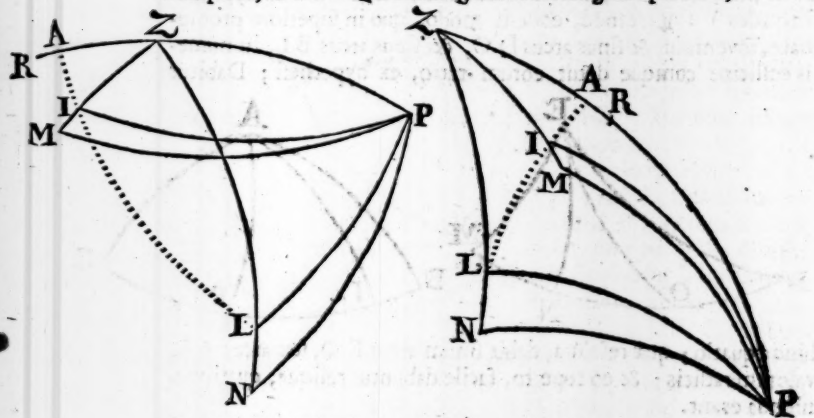
Iiſdem mediis, poſſunt reſolvi utraq; hæc problemata; etiamſi A L, E O, non ſint æquales, ſi detur ratio eorum ſinuum.

Prop.

Prop. 68. Problema.

Ex datis duabus altitudinibus; cum Azimuthis Phænomeni; & altitudine Poli; utriusque altitudinis parallaxes, enucleare.

Sit P Z R, arcus meridiani, P polus, Z zenith; verus Phænomeni parallelus, A I L. Sitque primo unus apparentium locorum phænomeni R, in meridiano, cujus altitudo, (& igitur ipsius a vertice distantia, Z R) sit cognita; alter apparentium locorum in N, cujus distantia a vertice Z N, & angulus circuli azimuth, cum meridiano N Z P, sint data; loca autem vera, erunt in communi intersectione, azimuthorum datorum, cum parallelo vero, nempe A, & L. Quoniam igitur in triangulo sphærico, N Z P,



dantur latera Z N, Z P, & angulus N Z P; datur & totum triangulum N Z P: Datur igitur triangulum sphæricum N Z P, & arcus circuli maximi P R; duciturque arcus P L, ab angulo P, in latus Z N; & datur ratio, sinus segmenti L N, ad sinum arcus R A, differentiæ arcuum P R, & P L, seu illi æqualis (ex hypothesi) P A; (est enim eadem ratio quæ est inter sinus arcuum datorum Z R, Z N) dabitur igitur arcus L N, & arcus A R, parallaxes nempe altitudinum quæsitæ.

66. Hujus.

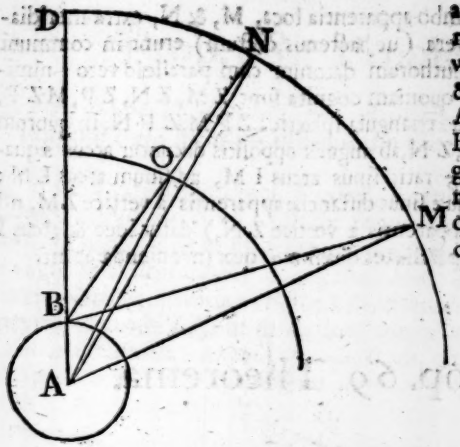
Secundo,

Secundo, Sint ambo apparentia loca, M, & N, extra meridianum; loca autem vera (ut hactenus dictum) erunt in communi intersectione azimuthorum datorum cum parallelo vero; nimirum in I, & L. Et quoniam cognita sunt Z M, Z N, Z P, M Z P, N Z P; dabuntur duo triangula sphærica Z P M, Z P N, in quorum latera nempe Z M, Z N, ab angulis oppositis ducuntur arcus æquales P I, P L: daturq; ratio sinus arcus I M, ad sinum arcus L N: (eadem enim est, quæ sinus distantiæ apparentis a vertice Z M, ad sinum distantiæ apparentis a vertice Z N,) datur ideo & arcus I M, & arcus L N, parallaxes quæsitæ; quæ inveniendæ erant. 67. *Hujus.*

Prop. 69. Theorema.

Ratio sinus parallaxeos unius Phænomeni, ad sinum parallaxeos alterius Phænomeni, est composita, ex reciproca proportione, distantiarum a centro terræ, & directa proportione sinuum, distantiarum apparentium a vertice.

Sit centrum terræ A, locus observatoris in terræ superficie B, cujus zenith D: Sintque duo phænomena, O, & M. Dico rationem sinus parallaxeos B O A, ad sinum parallaxeos B M A; esse compositam, ex ratione A M, ad A O; & ex ratione, sinus anguli D B O, ad sinum anguli D B M. Producatur B O, in N; sitque A N, æqualis ipsi A M: Manifestum est igitur phænomenon M, in N existens, habere parallaxem B N A: eritque, ut A N, hoc est A M, ad A O, ita sinus parallaxeos B O A, ad sinum parallaxeos B N A; &, ut sinus anguli D B O, ad sinum anguli D B M, ita sinus parallaxeos B N A, ad sinum parallaxeos B M A. Si igitur fuerint quotcunq; quantitates, nempe sinus anguli B O A, sinus anguli B N A, & sinus anguli B M A; ratio primæ, nempe sinus parallaxeos B O A; ad ultimam, nempe sinum parallaxeos B M A; componitur ex rationibus mediarum; nempe, sinus



anguli B O A, ad sinum anguli B N A, vel A N ad A O; & sinus anguli B N A, ad sinum anguli B M A vel sinus anguli D B O, ad sinum anguli D B M; quod demonstrandum erat.

Corollarium.

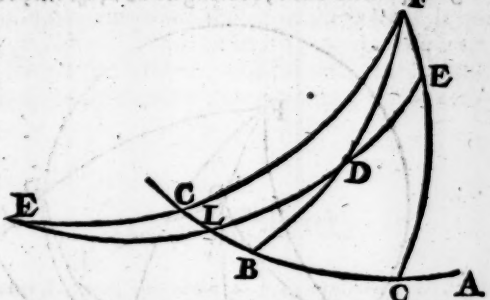
Ex hujus Theorematis demonstratione facile deducitur, sinus, sive parallaxium horizontalium, sive semidiametrorum apparentium, esse in reciproca proportione distantiarum phænomeni a centro terræ: & igitur sinus parallaxium, sunt directe proportionales sinubus semidiametrorum apparentium.

Prop. 70. Problema.

Ex datis, duabus longitudinibus, & latitudinibus Phænomeni, in circulo maximo moventis; punctum intersectionis; & angulum, illius circuli maximi cum ecliptica, invenire.

Sit A C B ecliptica cujus polus F, A principium arietis; a quo numerentur duæ phænomeni longitudines, A B, A C; sintque latitudines B D, C E, & loca phænomeni D, E. Deinde, producatur circulus maximus, in quo moveri supponitur phænomenon; sitque

fitque punctum intersectionis cum ecliptica L. In triangulo sphærico DEF, dantur latera DF, FE, una cum angulo intercepto DFE; & igitur datur angulus DEF: Deinde in triangulo sphærico



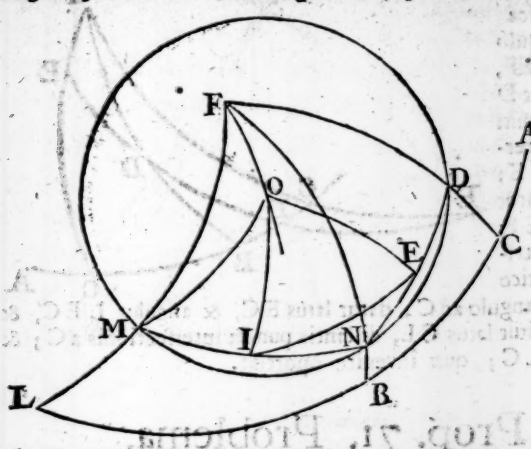
ECL, rectangulo ad C, datur latus EC, & angulus LEC, & proindè dabitur latus CL, distantia puncti intersectionis a C; & angulus ELC; quæ invenire oportuit.

Prop. 71. Problema.

Ex datis tribus longitudinibus, & latitudinibus, Phænomeni in circulo minore moventis; distantiam circuli minoris a suo polo; & polo locum, quo ad longitudinem, & latitudinem, invenire.

SIt ACBL, ecliptica, cujus polus F; A principium arietis, a quo innumerentur tres phænomeni longitudines, AC, AB, AL; sintq; latitudines, CD, BN, LM; & loca phænomeni D, N, M. & quoniam dantur, DF, NF, MF, complementa nimirum latitudinum, cum angulis interceptis, DFN, MFN, differentiis longitudinum; dabuntur & arcus DN, MN; & anguli DNF, MNF, NMF; dabitur igitur angulus MND. Deinde, erigantur duo arcus EO, IO, perpendiculares arcubus DN, NM; & eos bifariam secantes, in E, & I: sitque eorum communis intersectio, punctum O; quod necessario erit polus circuli minoris, in quo movetur Phænomenon; ducaturq; arcus IE; & in triangulo sphærico, INE, dantur latera IN, NE, & angulus interceptus INE; ac proinde, dabuntur anguli, NEI, NIE, & latus IE. Tunc in triangulo OIE, e datis, angulis OEI, OIE, complementis nimirum angulo-

rum EIN, IEN, & latere IE, dabitur latus OI. Deinde in triangulo ſphærico MIO, rectangulo ad I, e datis, IO, IM, lateribus, non ignorabitur latus OM, diſtantia circuli minoris, a ſuo polo; & angulus OMI, qui ablatus ab angulo FMI relinquit angulum FMO datum. In triangulo igitur F M O, e datis, lateribus F M, MO, cum angulo intercepto FMO; dabitur latus FO, complemenum latitudinis poli circuli minoris, ſeu diſtantia ejus a polo eclipticæ; & angulus MFO, differentia illius longitudinis a longitudine Phænomeni M. Quæ invenienda erant.



Prop. 72. Problema.

Diametrum apparentem, ſolis, lunæ, vel ſtellæ cujuſlibet, exactiſſime obſervare.

PRojiciatur illius imago, ab una lente, vel ſpeculo, in aliam; ut tandem evadat in magnitudinem ſatis ſenſibilem; & in plano albo, radios ſideris fortiter revibrante, repræſentetur ejus imago, ut in *Prop.* 52 hujus, & ejus ſcholiis, docuimus. Deinde menſuretur quam exactiſſime imaginis diameter; qua data, ope quotcunque ſpeculorum, vel lentium, projecta; datisque, ſpeculorum, vel lentium, & imaginum, a ſe invicem diſtantiis; inveniatur angulus viſorius, viſibilis (nempe ſideris) ex vertice ſuæ incidentiæ, hoc

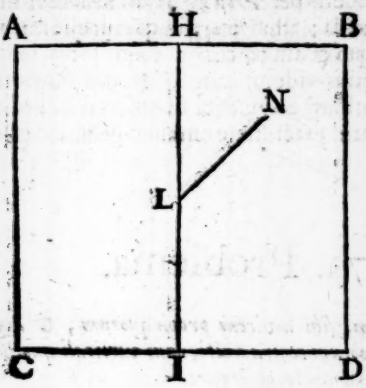
hoc eſt diameter apparens ſideris per *Prop* 53 hujus. Si autem imago, non ſit ſatis clara, & lucida; illuſtretur, in quacunque ratione data, per *Prop.* 54 hujus: quo etiam obſcurior fuerit locus, in quo fit obſervatio, eo diſtinctius videtur imago; & quo magis amplificatur imago (cæteris paribus) eo exactior fit obſervatio. Eodem etiam modo obſervantur quam exactiſſime omnium generum eclipſes.

Prop. 73. Problema.

Diſtantiam, duorum ſiderum, ſibi invicem propinquorum, & angulum circuli maximi, per eorum centra ducti, cum verticali qualibet, per centrum unius ſiderum ducto, obſervare.

FIgatur icoſcopii axis, in plano illius verticalis, cujus angulus cum circulo maximo per centra ſiderum ducto quæritur; ita ut ſurſum, & deorſum, libere moveri poterit; ſemper tenens axem, quam exactiſſime, in plano verticalis. Sitque hujus icoſcopii planum imaginis A B C D, in quo notetur recta H I, communis interſectio, plani imaginis, & circuli verticalis prædicti: in quam incidat, axis Icoſcopii productus, in puncto L. Deinde diligentiſſime attendatur, donec ſidus cujus centrum in circulo verticali notari debeat, circulum verticalem attingat: & moveatur Icoſcopium ſurſum & deorſum, donec cernatur centrum imaginis illius ſideris, in puncto L. Et eodem inſtante, notetur in plano imaginis, centrum alterius ſideris, in puncto N. Data igitur imagine L N, ope quotcunque lentium, vel ſpeculorum, projecta; & datis, lentium, vel ſpeculorum, & imaginum, a ſe invicem diſtantiis; inveniatur angulus viſorius viſibilis, ex vertice ſuæ incidentiæ; qui erit diſtantia ſiderum, quorum imagines ſunt L, N. Deinde menſuretur quam exactiſſime angulus H L N, qui erit angulus circuli verticalis, (in quo exiſtit axis Icoſcopii) cum circulo maximo, in quo exiſtunt ſiderum centra: Eſt enim recta H I, communis interſectio verticalis cum plano imaginis, & recta L N communis interſectio circuli maximi per centra ſiderum ducti, cum

plano,



plano imaginis: cumque communis intersectio circuli verticalis, & circuli maximi per centra siderum; nempe icoscopii axis, sit ad planum imaginis rectus; erit angulus HLN, æqualis angulo inclinationis planorum, circuli verticalis, & circuli maximi per centra siderum; hoc est angulo sphærico, ab illis comprehenso. Quem invenire oportuit.

Prop. 74. Problema.

Parallaxem Planetæ cujuslibet, exactissime investigare.

Sit S I B azimuth commune duorum locorum, quorum vertices S, B; & azimuth commune SIB, observetur, ex utroque loco, conjunctio corporalis planetæ, cujus verus locus I, cum stella fixa, cujus locus O: Sit autem apparens locus planetæ, ex loco, cujus vertex B, punctum L; & apparens locus planetæ, ex loco, cujus vertex S, punctum R. Deinde per *Prop.* 73 hujus, ex locis

quorum vertices S, B, investigentur arcus LO, RO, & anguli RLO, LRO; in triangulo igitur sphærico LRO; e datis lateribus L O, RO, & angulis R L O, L R O; quatuor modis potest inveniri latus L R, summa parallaxeon planetæ cujus verus locus I. Datur autem

rem ratio ſinuum earundem parallaxium; eadem enim eſt cum ratione, ſinus arcus B L, ad ſinum arcus S R; dabuntur igitur & parallaxes L I, I R ſeorſum: quas inveſtigare oportuit.

Scholium.

Ope hujus problematis, poterunt & ipſius Saturni parallaxes inveniri; ſi modo obſervationes exactæ adhibeantur.

Prop. 75. Lemma.

Si fuerint duæ ſeries magnitudinum arithmeticè proportionalium, & prima primæ ſeriei, addatur prima, ſecunda: & ſecunda primæ, ſecunda ſecundæ ſerei; & ſic deinceps: vel ſi ab iiſdem ſubſtrahantur; facta, vel relicta, erunt etiam ſeries arithmeticè proportionalium.

A B P C D E S F H

I K T L M N V O R

SIt eadem differentia, inter magnitudines A, & B C; quæ inter magnitudines D, & E F; nempe H; & ſit eadem differentia inter magnitudines I, & K L; quæ inter magnitudines M, & N O; nimirum R. Dico primo A — I deficere a B C — K L, vel eandem excedere, eadem differentia, qua D — M excedit, vel deficit ab E F — N O. Auferatur a B C, P C = H; & a K L, T L = R; eritque B P = A; & K T = I; ideo nulla erit differentia inter A — I, & B P — K T: Tota igitur differentia inter A — I, & B C — K L; eadem eſt, quæ inter P C, & T L, ſeu H, & R. Eodemq; modo oſtenditur differentiam inter D — M, & E F — N O eſſe æqualem differentiæ inter H, & R.

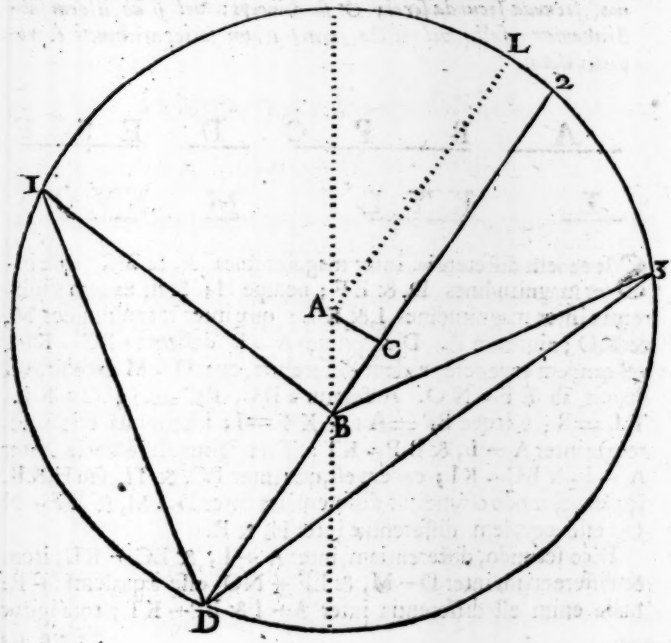
Dico ſecundo, differentiam, inter A + I, & B C + K L; item & differentiam inter D + M, & E F + N O eſſe æqualem H + R: nulla enim eſt differentia inter A + I & B P + K T; tota igitur differe tia

differentia inter A+I & BC+KL est PC+TL, =H+K; quæ demonstrari oportuit.

Prop. 76. Problema.

Ex dato planetæ motu medio, una cum tribus observationibus ex centro sui motus apparentis; ejus excentricitatem, & aphelii locum enucleare: supposito eum in circulo excentrico moveri.

CEntro A, describatur circulus 1 2 3 D, & in ejusdem peripheria, secundum observationum intervalla, sint arcus motus medii dati 1 2, 2 3; ita ut 1, locum primum; 2, secundum; 3, tertium planetæ locum, in circulo repræsenter. Deinde, a



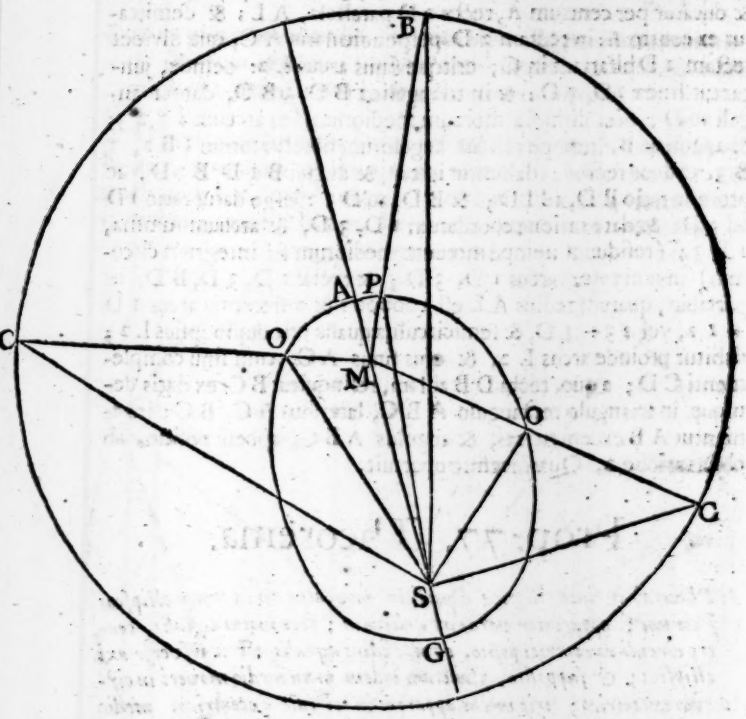
centro motus apparentis B, ducantur rectæ B 1, B 2, B 3; ita ut anguli 1 B 2, 2 B 3, ſint motus apparentes obſervati; & ex datis arcubus 1 2, 2 3, nimirum motibus mediis; & angulis 1 B 2, 2 B 3, motibus apparentibus; quæritur excentricitas A B, & aphelii poſitio A B 2: Producatur 2 B, uſque ad peripheriam in D; & ducatur per centrum A, rectæ 2 D parallela, A L; & demittatur ex centro A, in rectam 2 D perpendicularis A C, quæ dividet rectam 2 D bifariam in C; eritque ſinus arcus L 2: deinde, jungantur lineæ 1 D, 3 D; & in triangulis 1 B D, 3 B D, dantur anguli ad D; *viz.* dimidia motuum mediorum, ſeu arcuum 1 2, 2 3; & anguli ad B, nempe reſidua angulorum obſervatorum 1 B 2, 2 B 3, ad duos rectos: dabuntur igitur, & anguli B 1 D, B 3 D; ac proinde ratio B D, ad I D; & B D, ad D 3: ergo datur ratio 1 D ad 3 D: & data ratione chordarum 1 D, 3 D, & arcuum ſumma, 1 D 3; (reſiduum nempe motuum mediorum ad integrum circulum) inveniantur arcus 1 D, 3 D; & rectæ 1 D, 3 D, B D, in partibus, quarum radius A L eſt 100000: & differentia arcus 1 D + 1 2, vel 2 3 + 3 D, & ſemicirculi, æqualis erit duplo ipſius L 2; dabitur proinde arcus L 2, & ejus ſinus A C, cum ſinu complementi C D; a quo, recta D B ablata, relinquitur B C: ex datis denique, in triangulo rectangulo A B C, lateribus A C, B C; inveniantur A B excentricitas, & angulus A B C, aphelii poſitio, ab obſervatione 2, Quæ invenire oportuit.

Prop. 77. Theorema.

Si Planeta, in linea elliptica æqualiter moveatur circa unum ellipſeos focorum; apparenter vero circa alterum; foco motus æqualis, centro circuli excentrici poſito, cujus radius æqualis eſt tranſverſo axi ellipſeos; & ſuppoſito, planetam eodem motu medio moveri in circulo excentrico; erit motus apparens in circulo excentrico, media arithmetica, inter motum medium communem, & motum apparentem, in ellipſi: eodem ſemper poſito, centro motus apparentis, nempe altero ellipſeos foco.

SIt ellipſis APOG, in cujus peripheria, moveatur planeta, a P, ad O; æqualiter circa focum M; & apparenter circa focum S.

Sitque circulus ABC, cujus centrum M, & radius MB, æqualis axi transverso ellipseos AG; & moveatur planeta, a B, ad C, eodem motu medio, quo a P ad O: ita, ut MPB, MOC, fiant lineæ rectæ: ducanturq; lineæ veri motus, tam in circulo, quam in ellipsi SP, SO, SB, SC. Dico angulos PSO, BSC, BMC, esse arithmeti,



cé proportionales; hoc est eandem esse differentiam inter PSO, & BSC, quæ est inter BSC, & BMC. Quoniam enim AG, est æqualis MC; erit & MO + OS = AG = MC; & ablata MO utrinque; erit OC = OS; & OCS = OSC; & AMC − OCS = ASC; & ASC − OCS = ASO: tres igitur anguli AMC, ASC, ASO, sunt

sunt in continua proportione arithmetica; quorum communis differentia est angulus OCS. Eodemque modo demonstrabitur, tres angulos AMB, ASB, ASP, esse continue proportionales arithmeticé, & habere communem differentiam, angulum PBS. Igitur si hæ duæ series, arithmeticé proportionalium, ordine sibi invicem addantur, vel a se invicem subtrahantur; emergent anguli BMC, BSC, PSO arithmetice proportionales; quod demonstrandum erat.

Corollarium.

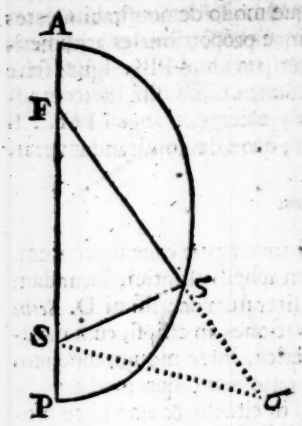
Hinc patet modus Geometricus; inveniendi excentricitatem, seu focorum distantiam, & positionem aphelii elliptici, secundum Hypothesin C.L: V: & in omni literatura doctissimi D. *Sethi Wardi.* Si enim dentur tres observationes in ellipsi, cum motibus mediis; Sumatur media arithmetica, inter motum medium, & motum apparentem duarum observationum; quæ media arithmetica ponatur loco motus apparentis in circulo, & cum hisce motibus apparentibus, & motibus mediis iisdem, qui in ellipsi; inveniatur circuli excentricitas, quæ eadem erit cum distantia focorum ellipseos; positoque excentrici radio, axe ellipseos, eritque positio aphelii a linea medii motus in excentrico, eadem cum positione aphelii, seu axeos transversi, ab eadem linea medii motus in ellipsi. Decreveram hic manum de tabula tollere; sed quoniam de planetarum inæqualitatibus, acutissimas aliquot propositiones evulgabit D. *Sethus Ward*; placuit hunc tractatulum illis nobilitare, & quasdam de eadem materia e nostra penu adjungere. 76. *Hujus.*

Prop. 78. Problema.

E datis, Planetæ motu medio, Aphelii loco, & ratione axeos transversi, ad distantiam focorum ellipseos; planetæ motum apparentem invenire pro oculo in sole constituto.

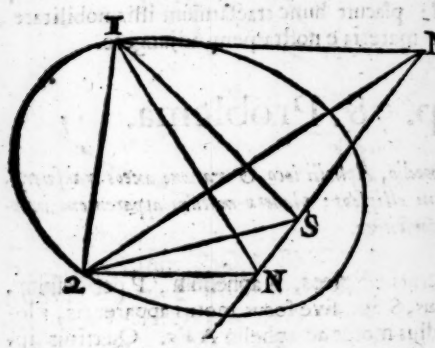
Sit A P axis transversus ellipseos, A aphelium, P perihelium, F focus medii motus, S Sol, sive focus motus apparentis, σ locus planetæ, cujus medius motus ab aphelio A F σ. Quæritur ipsius verus motus ab aphelio A S σ? Producatur F σ ad τ, &

sit $\varsigma\sigma = \varsigma S$; & ducatur $S\sigma$. Quoniam igitur in triangulo $SF\sigma$ dantur duo latera FS, $F\sigma$, una cum angulo comprehenso; habemus angulos ad S & σ; at $FS\sigma - F\sigma S = AS\varsigma$, angulo quem invenire oportuit. Quod si quæratur $S\varsigma$ distantia inter solem, & planetam; quoniam in triangulo $FS\varsigma$, dantur omnes anguli, cum latere FS; dabitur etiam latus $S\varsigma$.



Prop. 79. Problema.

Loca centrica nodorum in ecliptica, una cum planetæ, in iisdem, a sole distantiis, ex observationibus in terra habitis investigare.



Sit primo terra in 1; & ex ea observetur planeta in nodo suo N carens latitudine: & secundo, ex terra in 2, observetur idem planeta, in eodem nodo N; sitq; S sol; & recta S N, communis intersectio plani eclipticæ, & plani orbitæ planetæ:

tæ: In triangulo 1 S 2, dantur latera 1 S, S 2, & angulus 1 S 2; & proinde dantur anguli S 1 2, S 2 1, & latus 1 2. Cumque detur N 2 S ex observatione, dabitur & angulus N 2 1; eodemque modo dabitur N 1 2. Et in triangulo N 1 2, e datis 1 2, N 1 2, N 2 1, invenitur 2 N. Denique in triangulo N 2 S, e datis N 2, 2 S, N 2 S; inveniatur N S 2 positio nodi N, & S N distantia planetæ in nodo N a sole S.

Scholium.

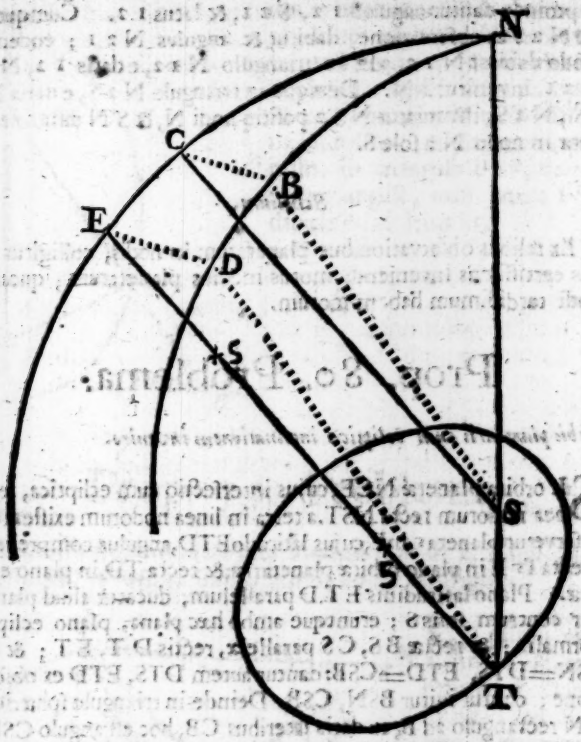
Ex talibus observationibus planetarum in nodis, colligitur modus certissimus inveniendi motus medios planetarum; quoniam nodi tardissimum habent motum.

Prop. 80. Problema.

Orbis planetarii cum ecliptica inclinationem invenire.

Sit orbita planetæ NCE, cujus intersectio cum ecliptica, seu linea nodorum recta NST. a terra in linea nodorum existente T, observetur planeta ♈, in E, cujus latitudo ETD, angulus comprehensus a recta T♈ E in plano orbitæ planetariæ, & recta TD, in plano ecliptica. Plano latitudinis E T D parallelum, ducatur aliud planum, per centrum solis S; eruntque ambo hæc plana, plano ecliptica normalia; & rectæ B S, C S parallelæ, rectis D T, E T; & ideo BSN = DTS, ETD = CSB: dantur autem DTS, ETD ex observatione; dantur igitur BSN, CSB. Deinde in triangulo sphærico C B N rectangulo ad B, ex datis lateribus CB, hoc est angulo CSB, & BN hoc est angulo B S N; inveniatur angulus C N B, inclinatio quæsita. 11. 16.

Prop.

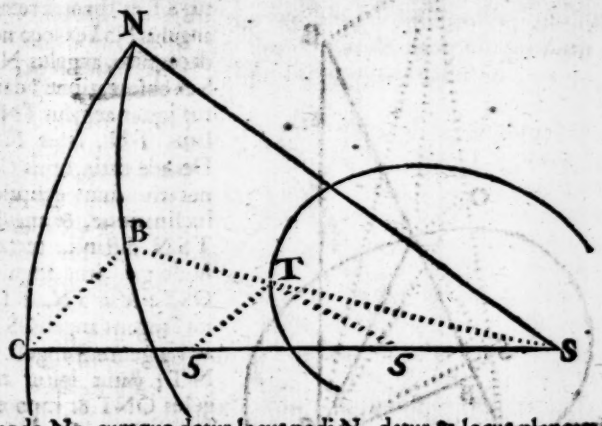


Prop. 81. Problema.

Ex observatione planeta, in conjunctione, vel oppositione cum Sole; ejus inæqualitatem secundam exuere: latitudinem centricam, & a sole distantiam reperire.

OBservetur planeta ♄, cujus nodus N, in conjunctione, vel oppositione cum sole S, ex terra T. Sitque planetæ ♄, locus in ecliptica

ecliptica obſervatus B, in ſua orbita C. Datur angulus BSN, nempe diſtantia nodi a loco planetæ in ecliptica obſervato; & ideo in triangulo ſphærico BNC rectangulo ad B, e datis latere B N, angulo BNC; reperitur arcus N C, diſtantia planetæ in ſua orbita,



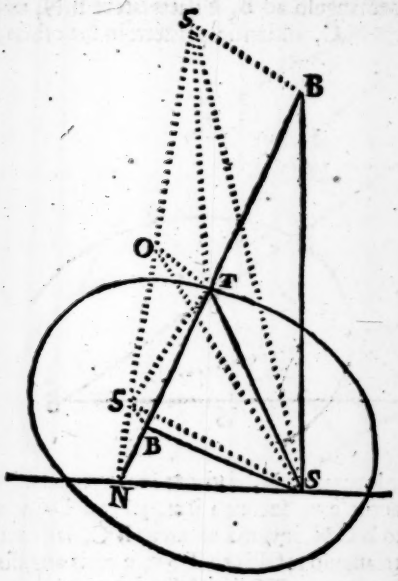
a nodo N; cumque detur locus nodi N, datur & locus planetæ in ſua orbita; & proinde exuitur ejus ſecunda inæqualitas. Deinde in eodem triangulo ſpærico B C N inveniatur arcus B C, latitudo planetæ centrica; & in triangulo rectilineo T S ☉, e datis angulis T S ☉ latitudine planetæ centrica, ☉ T S latitudine planetæ obſervata, vel ipſius complemento ad duos rectos, & latere T S diſtantia terræ a ſole; inveniatur latus S ☉, diſtantia planetæ a ſole.

Prop. 82. Problema.

Ex unica planeta obſervatione quacunque; ejus inæqualitatem ſecundam exuere: latitudinem centricam, & a ſole diſtantiam invenire.

OBſervetur planeta ☉, cujus linea nodorum N S, ex terra T, cum latitudine apparente ☉ T B. Producatur planum latitudinis apparentis, donec ſecuerit planum orbis planetarii in recta ☉ N, & planum eclipticæ in recta B T N. E centro terræ T, erigatur plano

plano ecliptiæ perpendicularis TO, usq; ad planum orbis planetarii in O: & jungatur S O recta, quæ necessario est in plano orbis planetarii. In triangulo N S T, datur latus ST ex theoria terræ, angulus NST ex loco nodi cognito, angulus NT S ex observatione; dantur igitur angulus TNS, latus T N, latus N S. Deinde datis, orbis planetarii cum ecliptica inclinatione, & angulo T S N distantia terræ a nodo; dabitur angulus OST: & ut TN ad TS, ita tangens anguli OST, ad tangentem anguli O N T; datur igitur angulus ONT, & innotescit angulus ♑TB ex observatione; ideoq; in triangulo ♑NT, e datis omnibus angulis, cum latere N T, datur & latus ♑N: & in triangulo ♑NB rectangulo ad B, e datis angulo ♑NB, & latere ♑N, innotescit latus NB. Deinde in triangulo BNS, e datis lateribus BN, NS, cum angulo intercepto B N S, reperiuntur latus BS, & angulus B N, longitudo centrica planetæ in ecliptica, a linea nodorum computata; & in triangulo sphærico rectangulo in superioribus figuris C BN, e datis latere BN, nempe angulo BSN in hac figura; & angulo B N C orbium inclinatione, inveniatur BC latus, hoc est angulus B S ♑, latitudo centrica, & latus CN, hoc est angulus ♑ S N, longitudo planetæ centrica in suo orbe, a linea nodorum computata: & proinde exuitur secunda ejus inæqualitas. Tandem in triangulo ♑ S B rectangulo ad B, e datis B S, B S ♑; non ignorabitur latus S ♑, distantia planetæ a sole.



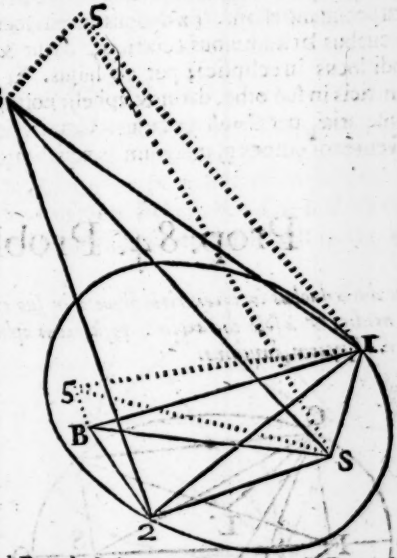
31. Hujus.

Prop.

Prop. 83. Problema.

Ex binis observationibus planeta, in eodem orbis puncto; ejus distantiam a sole, locum centricum in ecliptica, quo ad longitudinem, & latitudinem invenire: supposita tantum terræ theoria.

SIt primo terra in 1, & ex ea observetur planeta ♄, e quo in eclipticæ planum, demittatur perpendicularis ♄ B; eritq; locus illius observatus in ecliptica B, cum latitudine ♄ 1 B; & post unam, vel plures planetæ revolutiones integras, rursus observetur planeta ♄, ex terra 2, sitque sol S. Dantur ex theoria terræ, omnia latera, & omnes anguli, trianguli 1 S 2; dantur etiam anguli S 1 B, S 2 B, ex observatione; igitur in triangulo 2 1 B, dantur anguli 2 1 B, 1 2 B; & proinde angulus 2 B 1: datur autem & latus 2 1, e quibus inveniatur latus B 1; & in triangulo 1 B ♄, rectangulo ad B, e datis latere 1 B, & angulo B 1 ♄, latitudine observata; reperitur B ♄. Deinde in triangulo B 1 S, e datis B 1, 1 S, B 1 S, datur B S, & 1 S B, locus planetæ centricus in ecliptica, a terra in 1 computatus; & in triangulo B S ♄ rectangulo ad B, e datis B ♄, B S, innotescit angulus B S ♄, latitudo planetæ centrica; & latus S ♄, distantia illius a sole.



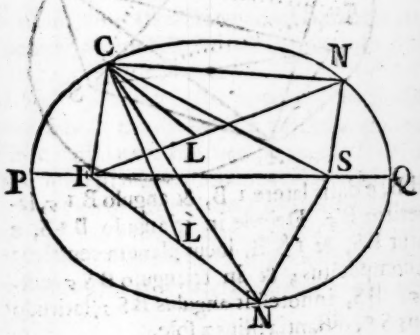
R *Scholium.*

Scholium.

Manifestum est (si in hoc problemate daretur locus nodi) dari, & inclinationem maximam, & locum planetæ centricum in suo orbe; vel (si daretur inclinatio maxima) dari locum nodi, & locum planetæ centricum in suo orbe: In triangulo enim sphærico rectangulo, latitudo centrica est latus unum, longitudo centrica in ecliptica, a linea nodorum computata, latus alterum, longitudo planetæ centrica in suo orbe, a nodo computata, latus tertium, & orbium inclinatio, unus angulus: E quibus quatuor, duo dati, duos ignotos semper manifestant. Ex duobus autem locis centricis in ecliptica, & duabus latitudinibus centricis, datur & inclinatio maxima, & nodi locus in ecliptica, per 70 hujus. Et ex tribus planetæ locis centricis in suo orbe, datur & aphelii positio, & species ellipseos planetariæ, per *Corol.* 77 hujus. Constat igitur modus multiplex, inveniendi omnes planetarum inæqualitates.

Prop. 84. Problema.

Ex datis duobus locis centricis planeta in suo orbe, una cum ipsius motu medio, & a sole distantiis: positionem aphelii, & ellipseos planetariæ speciem, invenire.

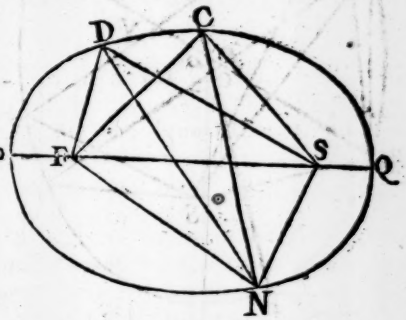


Sit PCQN ellipsis planetæ, cujus focus medii motus F, focus veri motus, sive sol S, axis transversus PQ, loca planetæ C, N: E datis in triangulo CSN lateribus SC, SN, distantiis nimirum planetæ a sole; & angulo ab illis comprehenso CSN, e locis

e locis planetæ centricis cognito; inveniatur latus C N, & angulus N C S. Ducantur rectæ F C, F N; & quoniam NS + NF = CS + CF; erit CS − SN = NF − CF = LN: est enim FC = FL: & in triangulo FLC isosceli, dantur omnes anguli, nempe LFC; ex medio motu inter observationes planetæ C, N, & anguli FLC, FCL propter eorum æqualitatem; ergo datur angulus CLN. Deinde in triangulo CLN, e datis CLN, NC, NL, reperitur LCN; datur ideo angulus FCN = FCL + LCN; & in triangulo FCN, e datis omnibus angulis, cum latere C N, datur latus CF: & CF + CS = PQ. Denique in triangulo FCS, e datis FC, CF, & angulo FCS, ex angulis inventis FCN, NCS cognito; inveniuntur FS distantia focorum, & FSC positio aphelii, ab observatione C.

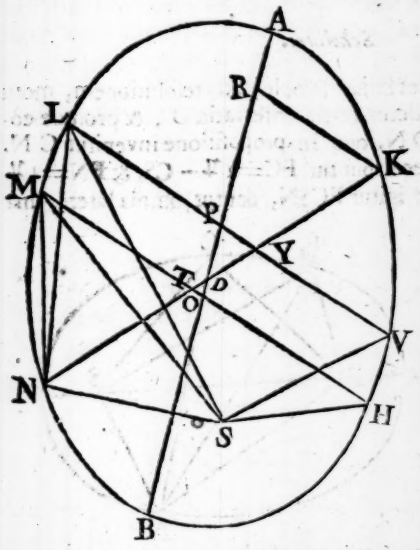
Scholium.

Si autem quis desideret hujus Problematis resolutionem, motu medio non supposito: detur tertia observatio D, & proinde eodem modo invenietur D N, quo in propositione invenitur C N. Sit axis P Q 1♄; & ideo dabuntur FC = 1♄ − CS, & FN = 1♄ − NS; in quadrilatero igitur FCSN, dantur omnia latera, una cum diametro C N, e quibus inveniatur diameter FS. In quadrilatero quoq; FDSN, dantur omnia latera SD, S N ex observatione, F D = 1♄ − DS, F N = 1♄ − N S una cum diametro D N, e quibus rursus inquiratur FS: datur igitur æquatio inter F S primo inventam, & F S secundo inventam, cujus resolutio manifestat omnia quæsita.



Methodus autem omnium pulcherrima, est illa quam tradit D. *Wardus astr. Geometrica, pag.* 50, quæ nec supponit motum medium, nec solem esse ellipseos focum, sed tantum, solis centrum immobile, & planetas moveri, in lineis ellipticis; Unde centrum

trum motus medii, (si tale detur) & locum solis intra ellipsem, ab aliis supposita, demonstratione Geometrica concludit. Sed propter eximium hujus methodi usum conabimur nos aliam illius praxem in medium afferre. Sint quinque puncta in ellipsi, H, K, L, M, N, quæ nusquam terminent lineas parallelas, ducantur N K, M H, secantes sese in T: lineæ autem MH ducatur parallela L V, secans NK in Y. Observationibus dantur omnes anguli ad S, & rectæ inter S, & quinq; puncta ellipseos: & proinde cognoscuntur rectæ MN, NK, NL, & anguli MNS, KNS, MNT, NMS, HMS, NMT, NLY. Deinde in triangulo rectilineo MNT, e datis omnibus angulis, cum latere MN, dantur etiam latera NT, MT; & in triangulo rectilineo NLY, e datis omnibus angulis, (est enim MTN=LYN) cum latere LN; dantur latera NY, LY; at NTxTK: NYxYK:: MTxTH: LYxYV; ergo datur YV, & proinde tota LV. Bisecentur rectæ LY, MH, in P, & O, & ducatur recta APDOB, diameter nempe ellipseos, cui ordinatim applicantur PV, OH; eidemq; diametro ordinatim applicetur recta KR: & ob similitudinem triangulorum PDY, TDO, erit PY + TO : TY :: PY : DY; cumque detur angulus PYD, non latebunt PD, DO, DR, KR. Sint igitur in numeris datæ, rectæ, OH 10, PV 12, RK 8, PO 4, RP 2, cum angulo KRB 60. Ponatur BO 1♃; eritq; BP 1♃ + 4, sed 100 : 144 :: 1♃xOA : 1♃ + 4xPA; igitur per conversum 99. de proportionalitatibus *Greg. a S. Vincentio*; 100 est ad 144, at ratio 1♃ ad 1♃ + 4, est ad rationem PA ad OA=PA + 4;



A + 4; igitur PA est ad PA + 4, ut $\frac{144\mathfrak{U}}{100}$ ad 1 $\mathfrak{U}$ + 4, vel 144$\mathfrak{U}$ ad 100$\mathfrak{U}$ + 400; & ideo horum differentia, nempe 400 − 44$\mathfrak{U}$: 144$\mathfrak{U}$ :: 4: $\frac{576\mathfrak{U}}{400-44\mathfrak{U}}$ = PA; proinde PA + 4 = $\frac{1600+400\mathfrak{U}}{400-44\mathfrak{U}}$ = AO, & RA = $\frac{664\mathfrak{U}-800}{400-44\mathfrak{U}}$; at BC x OA = $\frac{1600\mathfrak{U}+400q}{400-44\mathfrak{U}}$: 100 :: B R x R A = $\frac{664q+3184\mathfrak{U}-4800}{400-44\mathfrak{U}}$: 64; igitur $\frac{102400\mathfrak{U}+25600q}{400-44\mathfrak{U}}$ = $\frac{66400q+318400\mathfrak{U}-480000}{400-44\mathfrak{U}}$, & æquatione reducta 17$q$ = 200 − 90$\mathfrak{U}$; unde datur 1$\mathfrak{U}$ = $\frac{95425-45}{17}$ = 1686 = BO. Atq; ex his facile dantur diametri conjugatæ; & ex diametris conjugatis, & earum angulo, axes conjugati per praxem *pag.* 50. *ast Geometricæ*, vel ope 72, & 77 de ellipse *Grego. a S. vincentio.* Et tandem ex prædictis datis, facile innotescunt omnia quæsita, centrum nempe motus medii, (si sit in rerum natura) locus solis intra ellipsem, & excentricitas, seu distantia centri solaris a centro medii motus, & ellipseos planetariæ species.

Prop. 85. Problema.

Suppositis Theoriis Terræ, & Planetæ; locum Planetæ e terra, quo ad longitudinem, & latitudinem supputare.

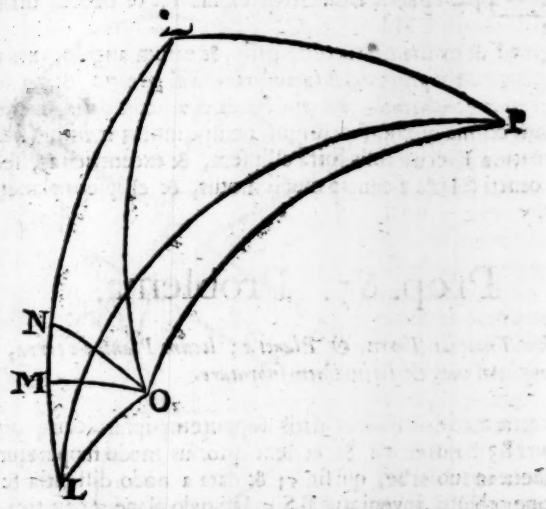
EX terræ mediis motibus datis supputetur ipsius locus, qui in figura 83 hujus sit 1: & eodem prorsus modo supputetur locus planetæ in suo orbe, qui sit 5; & data a nodo distantia & inclinatione orbium, inveniatur B S 5, latitudo planetæ centrica, & locus illius in ecliptica B; cumq; detur locus terræ in ecliptica 1, datur angulus 1 S B. Dantur etiam ex theoriis terræ & planetæ 78. *Hujus.* SO, S 5 & in triangulo rectangulo S B 5, e datis 5 S, B S 5 reperitur B S. Deinde in triangulo B S 1 e datis B S, S 1, & angulo comprehenso B S 1, datur latus 1 B, & angulus S 1 B, locus planetæ in ecliptica, e terra 1. Et tandem, ut 1 B ad S B, ita tangens 78. *Hujus.*

31. *Hujus.* gens anguli B S , ad tangentem anguli B I ϛ, latitudinis quæsitæ.

Prop. 86. Problema.

Ex unica eclipsi lunari; parallaxem lunæ, & diametrum umbræ in transitu lunæ investigare: suppositis tantum solis theoria, & fixarum locis.

OBserveturquam exactissime in eclipsi lunæ, cum cornua lunæ fiant ad perpendiculum, sive existant in uno Azimuth: (si



modo accidat) & in eo temporis articulo, observetur distantia cornuum, altitudo unius cornu, & illius declinatio, & ascensio recta, per stellas fixas; ac proinde non latebit, declinatio, & ascensio recta, puncti medii inter cornua. Sit distantia puncti medii inter cornua a polo P, arcus PL, sitq; complementum altitudinis apparentis, seu distantia apparens ejusdem puncti a vertice Z,

arcus

arcus ZL. Et in triangulo ſphærico ZPL, e datis tribus lateribus, inveniatur angulus ZLP. Sitq; centrum umbræ, ſeu oppoſitum centri ſolis O; & quoniam datur ipſius declinatio, & aſcenſio recta, dabuntur in triangulo ſphærico LPO, latus PO, diſtantia centri umbræ a polo, angulus OPL differentia aſcenſionum rectarum, & latus LP obſervatum; dabitur ergo latus LO, & angulus OLP. Deinde a centro umbræ O cadat in circulum verticalem ZL, & vere, & apparenter, per cornua lunæ tranſeuntem, arcus perpendicularis OM: Et quoniam duo circuli in ſphæra, nempe circulus lunæ, & circulus umbræ, ſe mutuo ſecant in lunæ cornubus; arcus a polo unius circuli, perpendicularis ad arcum circuli maximi eorum interſectiones jungentem, nempe OM, bifariam dividit præ- *Theod. 2.9.*
dictum arcum in puncto M; erit igitur M locus verus illius puncti, cujus L eſt locus apparens, nimirum puncti medii inter cornua; & arcus ML ejuſdem puncti parallaxis. qui reperitur ex reſolutione trianguli ſphærici LMO rectanguli ad M, e datis angulo MLO = ZLP + PLO, & latere LO. Deinde fit N verus locus unius cornu, & in triangulo ſphærico MNO rectangulo ad N, e datis MN, MO, datur NO, ſemidiameter umbræ. Ut autem geometricis ingeniis aliquantulum ſatisfaciam, duo hanc parallaxem eſſe genuinam parallaxem, centri illius circuli in corpore lunæ, qui ducitur per illius cornua, & noſtrum viſum; data autem hac parallaxi, poterit inveniri & geometrica parallaxis centri lunaris, per 69 hujus, quæ nunquam ſenſibiliter differt a parallaxi nunc inventa.

Scholium.

Sed quoniam difficulter invenitur aſcenſio recta primæ ſtellæ fixæ, & parallaxis lunæ multo exactius inveniri poterit, per commune azimuth ſecundum 62, 64, 65 hujus; ſatius eſſet per parallaxem lunæ ita inventam, & hujus Problematis converſum, aſcenſionem rectam primæ ſtellæ fixæ inveſtigare. Statuebam de theoria lunæ quædam adjungere; ſed in ipſo veſtibulo hæret ſaxum, ab aſtronomis adhuc inconcuſſum, & ingreſſum geometricum omnino prohibens: motus enim medii lunares in hunc uſque diem, non determinantur methodo geometrica. Illis vero ſuppoſitis, & datis tribus locis lunæ in ſua orbita, a ſecundis inæqualitatibus liberatis, poterit inveniri ſpecies ellipſeos lunaris, & poſitio apogæi

gæi in unaquaq; obſervatione, per Corollarium 77 hujus; ſi auferatur motus apogæi, & a motu medio, & motu vero; & reſidua ponantur loco motus medii, & motus veri; eodem modo procedendo ut in illo Corollario docetur. A ſecundis lunæ inæqualitatibus prorſus abſtineo, quoniam adhuc ipſis aſtronomis ſunt i cognitæ. Noſtra tamen mens eſt, aliqua etiam ratione ſtabilita; lunam habere aliquam inæqualitatem annuam, cum prima ſua inæqualitate commiſtam; a qua facile liberaretur, ope trium eclipſium lunarium, in uno eclipticæ loco obſervatarum.

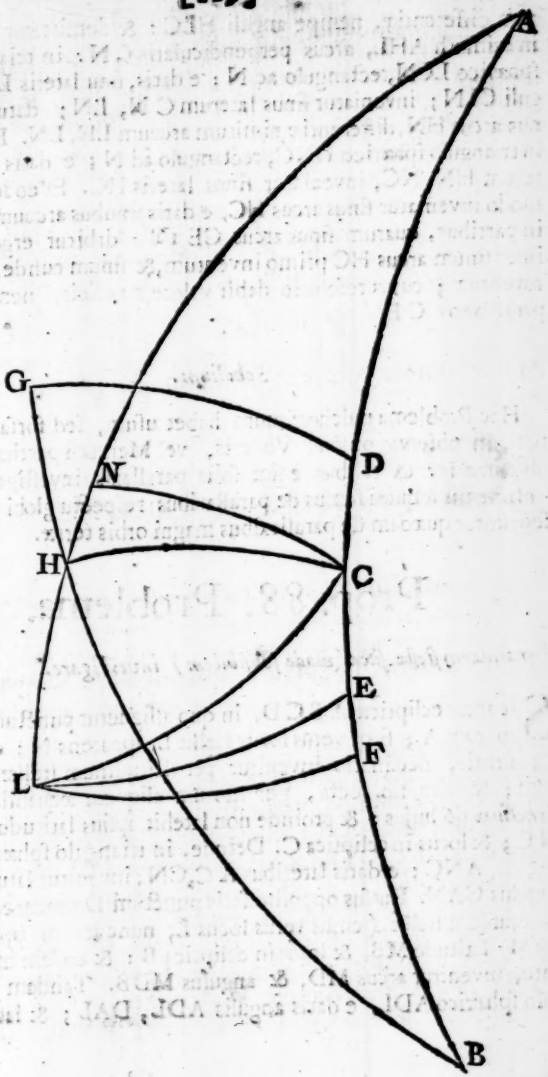
Prop. 87. Problema.

Ex duorum Planetarum conjunctione corporali; utriuſq; planetæ Parallaxes inveſtigare.

Sint loca vera duorum Planetarum, in conjunctione corporali obſervatorum H, C: & obſervetur planeta C in communi azimuth duorum locorum, quorum vertices A, B: ſintq; planetarum C, H, e loco cujus vertex A, loca apparentia E, L; & e loco cujus vertex B, loca apparentia D, G; & eodem inſtante obſerventur per 73 hujus arcus EL, DG, anguli CEL, GDC: Dantur autem arcus AE, BD, quadrantibus ad intentum ſatis ſubtiliter obſervati; & proinde dabuntur arcus AL, BG, & anguli HGD, HLF; e quibus datis, inveniendæ ſint parallaxes CD, CE, HG, HL: Quoniam autem impoſſibile eſt arcus AE, AL, BD, BG, eadem diligentia invenire, qua reperiuntur arcus, & anguli reliqui; ideo eos e calculo rejicimus: Manifeſtant tamen ſatis accurate, rationem ſinuum arcuum DC, CE, & GH, HL, per 64 hujus. Datur autem ex planetarum C, H, theoriis, proportio ſuarum diſtantiarum a centro terræ, & igitur per 69 hujus, datur proportio ſinus arcus CE, ad ſinum arcus HL; & ſinus arcus DC, ad ſinum arcus HG: & ideo dantur proportiones mutuæ inter ſinus parallaxium C E, C D, HG, HL: & proinde uno dato innoteſcunt omnes. ex puncto L in azimuth commune A C B, demittatur arcus perpendicularis L F: & in triangulo ſphærico ELF, rectangulo ad F, E datis latere LE, & angulo LEF; inveniantur latus FE, latus FL, & angulus F L E: innoteſcit igitur angulus FLH. Ponatur ſinus

parallaxes

parallaxeos CE 1¼; & e datis ſinubus arcuum FE, EC, inveniatur ſinus arcus FC eorum ſummæ: deinde in triangulo ſphærico L F C, rectangulo ad F, e datis ſinubus laterum FC, FL, inveniatur ſinus lateris L C, & anguli FLC: e datis itaq; ſinu anguli H L F, & ſinu anguli C L F, inveniatur ſinus eo-



S jum

rum differentiæ, nempe anguli HLC: & demittatur a puncto C in azimuth AHL, arcus perpendicularis CN: in triangulo itaq; sphærico LCN, rectangulo ad N; e datis, sinu lateris LC, sinu anguli CLN; inveniatur sinus laterum CN, LN; datur autem sinus arcus HN, differentiæ nimirum arcuum LH, LN. Et tandem in triangulo sphærico HNC, rectangulo ad N; e datis sinubus laterum HN, NC, inveniatur sinus lateris HC. Et eodem prorsus modo inveniatur sinus arcus HC, e datis sinubus arcuum DC, GH, in partibus, quarum sinus arcus CE 1♑: dabitur ergo æquatio, inter sinum arcus HC primo inventum, & sinum eundem secundo inventum; cujus resolutio dabit valorem radicis, nempe sinum parallaxeos CE.

Scholium.

Hoc Problema pulcherrimum habet usum, sed forsan laboriosum, in observationibus Veneris, vel Mercurii particulam Solis obscurantis: ex talibus enim solis parallaxis investigari poterit. Hactenus loquuti sumus de parallaxibus respectu globi terrestris: sequuntur quædam de parallaxibus magni orbis terræ.

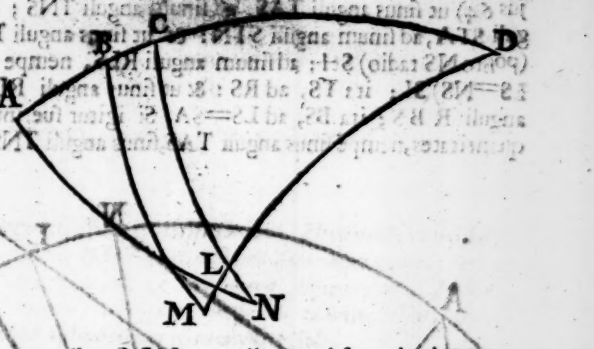
Prop. 88. Problema.

Parallaxem stellæ fixæ (modo sensibilem) investigare.

Sit arcus ecliptica A B C D, in quo assignetur punctum solis oppositum A; sitq; verus locus stellæ L, apparens N; cujus loci apparentis, declinatio invenitur per altitudinem stellæ meridianam; & ascensio recta, per motum aliquem æquabilem; vel *Scholium* 86 hujus: & proinde non latebit ipsius latitudo, quæ sit NC; & locus in ecliptica C. Deinde, in triangulo sphærico rectangulo, ANC; e datis lateribus AC, CN; invenitur latus AN, & angulus CAN. Rursus oppositio solis punctum D tenente, observetur ejusdem stellæ (cujus verus locus L, nunc autem apparens locus M) latitudo MB, & locus in ecliptica B; & eodem modo quo ante, invenitur arcus MD, & angulus MDB. Tandem in triangulo sphærico ADL, e datis angulis ADL, DAL; & latere AD,

per

per motum solis cognito; dabitur latus A L; quod ab arcu A N ablatum, relinquit L N parallaxem, observationis N; & latus D L, quod ab arcu DM ablatum; relinquit LM, parallaxem observationis M.

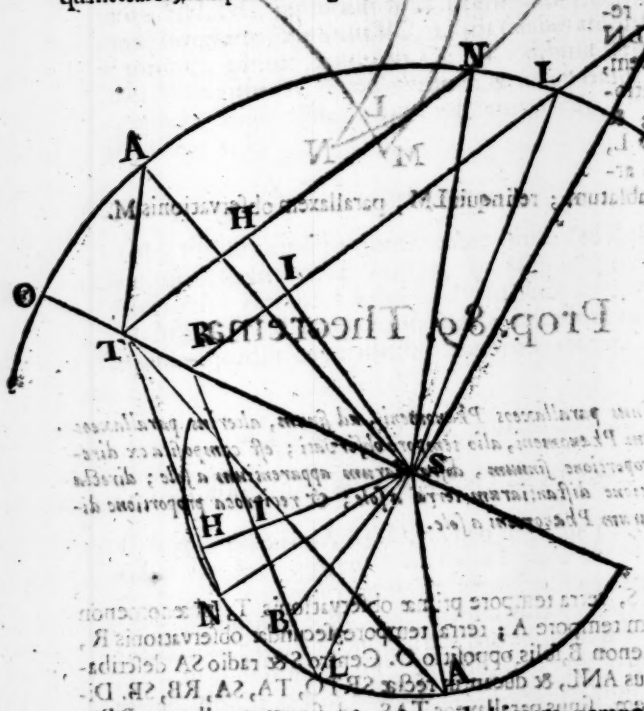


Prop. 89. Theorema.

Ratio, sinus parallaxeos Phænomeni, ad sinum, alterius parallaxeos ejusdem Phænomeni, alio tempore observati; est composita ex directa proportione sinuum, distantiarum apparentium a sole; directa proportione distantiarum terra a sole; & reciproca proportione distantiarum Phænomeni a sole.

Sit sol S, terra tempore primæ observationis T, phænomenon eodem tempore A; terra tempore secundæ observationis R, Phænomenon B, solis oppositio O. Centro S & radio SA describatur circulus ANL, & ducantur rectæ SR TO, TA, SA, RB, SB. Dico rationem, sinus parallaxeos TAS, ad sinum parallaxeos RBS, esse compositam; ex ratione sinus anguli STA, ad sinum anguli S RB; ratione TS, ad RS; & ratione BS, ad AS. Rectæ RB, parallela ducatur TN; & ad intersectiones rectarum RB, TN, cum circulo A N L, nempe L, N, ducantur rectæ S L, SN; & ad rectas T N, R B, perpendicularis ducatur SIH. Eritque (per hu-

jus 64) ut ſinus anguli TAS, ad ſinum anguli TNS; ita ſinus anguli STA, ad ſinum anguli STN: & ut ſinus anguli TNS, nempe (poſito radio NS radio) SH; ad ſinum anguli RLS, nempe (poſito radio LS=NS) SI; ita TS, ad RS: & ut ſinus anguli RLS, ad ſinum anguli RBS; ita BS, ad LS=SA. Si igitur fuerint quotcunque quantitates, nempe ſinus anguli TAS, ſinus anguli TNS, ſinus angu-



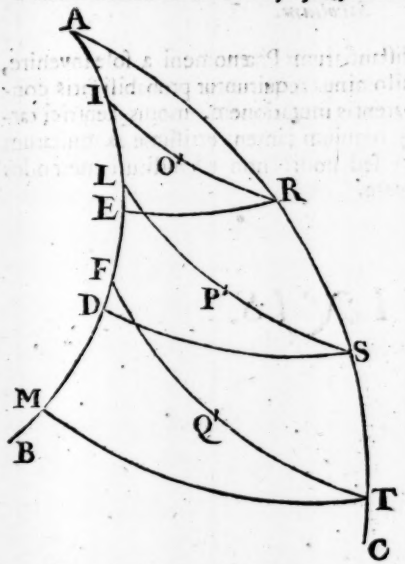
RLS, ſinus anguli RBS; ratio primæ ad ultimam, nempe ſinus parallaxeos TAS, ad ſinum parallaxeos RBS, componetur ex rationibus mediarum, quæ eædem demonſtratæ ſunt cum rationibus; ſinus anguli STA, ad ſinum anguli SRL; TS, ad RS; BS, ad AS: patet ergo propoſitum.

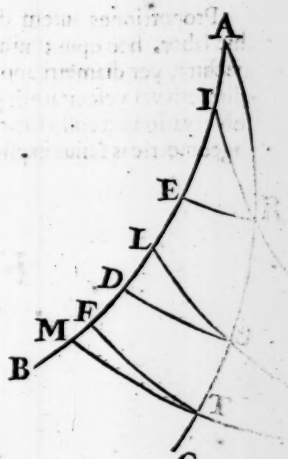
Prop.

Prop. 90. Problema.

E datis tribus longitudinibus, & latitudinibus, Phænomeni cujuslibet, circa ſolem agitati; ipſius inæqualitatem ſecundam exuere; orbis inclinationem cum ecliptica, & in unaquaq; obſervatione, Phænomeni a ſole diſtantiam inveſtigare: ſuppoſitis tantum, telluris theoria, & rationibus diſtantiarum phænomeni a Sole.

SIt arcus eclipticæ AB, orbis Phænomeni AC, tria loca Phænomeni e terra obſervata O, P, Q, in ſuo orbe R,S,T. Quoniam





loca phænomeni e terra obſervata dantur; dabuntur etiam ejuſdem

dem, vel a sole, vel ab oppositionibus solis, distantiæ apparentes, nempe I O, LP, MQ; & arcus IL, LM; & anguli OIA, PLA, QMA, & per Prop. præcedentem innotescunt rationes sinuum, parallaxium RO, SP, TQ. Ponatur sinus arcus RO 1 ℔; dabuntur igitur sinus arcuum SP, TQ, in numeris collicis: dantur autem sinus arcuum IO, LP, MQ; deprehenduntur ergo sinus arcuum IR, LS, MT, in numeris collicis. Et ex datis sinubus arcuum IR, LS, MT, cum sinubus angulorum RIF, SLD, TME; inveniuntur sinus arcuum perpendicularium RE, SD, TF, & sinus arcuum E D, DF. Deinde ex datis sinubus arcuum ER, DS, ED; quæratur sinus anguli CAB, per 70 hujus; & eodem modo e datis sinubus arcuum DS, FT, DF, inquiratur sinus ejusdem anguli CAB; dabiturque æquatio inter sinum anguli CAB primo inventum, & eundem secundo inventum, cujus æquationis resolutio manifestabit omnia quæsita.

Scholium.

Proportiones autem distantiarum Phænomeni a sole invenire, hic labor, hoc opus; nihilominus acquiruntur probabili satis conjectura, per diametri apparentis mutationem, motus centrici tarditatem vel velocitatem; omnium tamen certissime ex multarum observationum collatione: sed nostri non est instituti methodos ageometricas fusius explicare.

FINIS.

ptura fit in נִכְפַּר. Habet hîc locum metathesis & mutatio suprà dicta in ithpeal. Cęterùm vltima gutturali vel Res, perpetuò vltima esset pathah. Ab הִזְדַּמֵּן vel הִזְדַּמֶּן in tertijs pluralibus analogicè dicēdum הִזְדַּמְּנוּ & הִזְדַּמְּנָא.

BENONI.

מִתְקַטֵּל מִתְקַטְּלִין מִתְקַטְּלָא מִתְקַטֶּלֶן

Reperias & per א, pro מ, vt suprà in ithpeal.

INFINITVM.

אִתְקַטָּלָא בְּאִתְקַטָּלָא לְאִתְקַטָּלָא מִלְּאִתְקַטָּלָא

IMPERATIVVS.

אֶתְקַטֶּל אֶתְקַטְּלוּ אֶתְקַטְּלִי אֶתְקַטֶּלְנָא

FVTVRVM.

אֶתְקַטֶּל יִתְקַטֵּל תִּתְקַטֵּל נִתְקַטֵּל יִתְקַטְּלֵן תִּתְקַטְּלוּן

תִּתְקַטְּלִין תִּתְקַטְּלִין יִתְקַטְּלֵן תִּתְקַטְּלֵן

QVINTA CONIVgatio.

Hęc Chaldęis אַפְעֵל vel הַפְעֵל nominatur, etsi Daniel pro א retinet ה more Hebræo. Ob gutturalem vel Res desineret in pathah, אַצְמַח vegetauit, אַקְטַר suffijt: vnde tertiæ plurales essent, אַקְטָרוּ & אַקְטָרָא item אַקְטָרַת & c. & in tertia fœm. sing. ob Res אַקְטָרָת. Significatione cōsentit cum Hebraica hiphil, vt ferè voce. Hebraicè etiam ex hiphil iuxta formā Chaldæā א habēt, אַבְרֵךְ in Genesi, genua flecte &, אֲנְאַלְתִּי inquinaui, pro הִבְרֵךְ & הִנְאַלְתִּי: etsi alij אֲנְאַלְתִּי putēt ex futuro & præ-

Dicitur & אֶקְטֹל, יִקְטֹל & c. & vltima חֹעֵר, in fine pathah אֶקְטַר ligabo, אֲשַׁבַּח laudabo. sed inflexio vbi quid addetur, par.

QVARTA CONIVGATIO passiua superioris.

Hæc dicitur אִתְפַּעַל, voce respondens Hebraicæ hithpael seu hithpaal (he enim mutare in א est Chaldæis familiare) nō tem significatione, quum Hebræa sit reciproca, hæc propriè merè passiua, etsi reciprocā significationē Hebręorū more interim retineat. Differt á secūda, quòd illa sit leuis, hæc affecta daghes.

PRÆTERITVM.

אִתְקַטַּל אִתְקַטְּלַת אִתְקַטְּלַת אִתְקַטְּלוּ אִתְקַטְּלָתוּן אִתְקַטְּלָנָא

Fœm. אִתְקַטְּלָא אִתְקַטְּלָתֵן אִתְקַטְּלַת אִתְקַטְּלַת

Tertiam fœm. sing. malunt alij gemino segol conformare, אִתְקַטֶּלֶת. nos malumus sequi analogiam.

Nil vetat quò min⁹ dicatur etiā אִתְקַטֵּל vel אִתְקַטֵּל iuxta varietatē formarum actiui, quod & in sequentibus temporibus obtineat, excepto infinito quod paragogen habet. Argumento est הִזְדַּמִּנְתּוּן parastis vos, he pro aleph, vt sæpe in Daniele: quod ita quidē legitur, at scribitur הִזַּמִּנְתּוּן, taf coniugationis absorpto in prima radicis, vt suprà in hithpeal. postulat autē vsus verbi frequens in Talmud daleth exprimi, sicut dicunt נִזְדַּמֵּן לוֹ contigit ei, & הַדִּין נִזְדַּכֵּךְ iustificatum est iudiciū, voce partim ex niphal, partim ex hithpael cōposita: quod illis frequentissimum est, in scri-